This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 05775434 7

Villarceau
O7[illegible]

(IC)

# MÉMOIRES ET NOTES

358
133

SUR

# LES ÉTOILES DOUBLES

ET LA DÉTERMINATION

# DES ORBITES DES PLANÈTES;

PAR M. YVON VILLARCEAU.

(Extrait de la *Connaissance des Temps* pour l'année 1852.)

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.

1850.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER, RUE DU JARDINET, N° 1

# TABLE DES MATIÈRES.


Pages.

PREMIER MÉMOIRE SUR LES ÉTOILES DOUBLES. — *Méthode pour calculer les orbites relatives des étoiles doubles*..... 3

Relations entre les dérivées de l'angle de position et celles de la distance (n° 8)..... 16
Usage de ces relations pour obtenir les éléments de l'orbite autres que le demi-grand axe, au moyen des seuls angles de position, et aussi pour faire participer au résultat les distances observées. Détermination du demi-grand axe (n° 9)..... 20
Résumé des formules propres à la détermination des éléments des orbites relatives des étoiles doubles (n° 10)..... 21
Conditions auxquelles les données doivent satisfaire..... 22
Rapport de la somme des masses des composantes à la somme des masses du Soleil et de la Terre, au moyen de la parallaxe (n° 10)..... 25

DEUXIÈME MÉMOIRE SUR LES ÉTOILES DOUBLES. — *Méthode pour le calcul des orbites relatives dont le plan coïncide, ou à peu près, avec le rayon visuel*..... 26

Emploi des coordonnées rectangulaires (n° 1 et suivants)..... *Ib.*
Lieux des points d'inflexion des courbes construites avec les temps pour abscisses et les $x$ ou $y$ pour ordonnées, et moyens qu'ils fournissent de vérifier la concordance des observations dans le voisinage de ces points. Note de la page..... 27
Relations entre les dérivées différentielles des coordonnées $x$ et $y$, et leur usage dans la détermination des éléments (n° 8)..... 38
Résumé des formules à employer lorsque le plan de l'orbite coïncide, ou à peu près, avec le rayon visuel (n° 9)..... 40
Conditions auxquelles les données sont assujetties (n° 9)..... 40 et 41
Addition relative au cas où l'on aurait $x = 0$ ou très-petit, à l'instant auquel se rapportent les calculs (n° 10)..... 45

PREMIÈRE NOTE SUR LES ÉTOILES DOUBLES. — (ζ *d'Hercule*)..... 49

Occultation d'une étoile fixe par une autre, et récit des circonstances de ce phènomène par M. Struve..... 50 et 51
Éléments approchés et corrigés de ζ d'Hercule..... 52
Comparaison avec les observations..... 53

Pages.

Discussion des indications fournies par William Herschel, en 1795, 1802 et 1803..... 54 et 55

Douze observations complètes de MM. Struve, faites de 1828 à 1847, et embrassant plus de la moitié de la durée de la révolution, sont insuffisantes pour la détermination des éléments..... 55

DEUXIÈME NOTE SUR LES ÉTOILES DOUBLES. — (*η de la Couronne boréale*)..... 56

Double interprétation permise des angles de position, lorsque les observations sont séparées par de longs intervalles de temps, et que les étoiles composantes sont à peu près de même éclat et de même couleur..... *Ib.*

MM. W. Struve, J. Herschel et Mädler s'accordent à attribuer à la révolution de η de la Couronne une durée de quarante-trois à quarante-quatre ans.... 57

Indétermination des éléments lorsque l'on n'emploie que les observations modernes..... 57 et 58

Emploi des deux anciennes observations de W. Herschel pour lever l'indétermination, et double solution due à la possibilité de *renverser* ces observations..... 58 et 59

Comparaison de ces deux solutions avec les observations..... 60

Impossibilité actuelle de distinguer laquelle est la vraie..... 62

Discussion des deux observations de W. Herschel, et probabilités en faveur de la révolution de soixante-six ans..... 63

La vraie solution sera distinguée vers la fin de 1853, et peut-être auparavant. 64

TROISIÈME NOTE SUR LES ÉTOILES DOUBLES. — (ξ *de la grande Ourse*). 65

Première application de la loi de Newton aux systèmes binaires, par Savary.... *Ib.*

Double indétermination des éléments de ξ de la grande Ourse, lorsque l'on ne fait usage que des observations modernes. La durée de la révolution se déduit immédiatement de la comparaison d'une observation de W. Herschel avec les précédentes. Les observations de 1802 et 1804 achèvent de lever l'indétermination..... 65 et 66

Éléments approchés et corrigés..... 67

Comparaison avec les observations..... 68 et 69

Traces d'erreurs systématiques..... 70

QUATRIÈME NOTE SUR LES ÉTOILES DOUBLES. — *Du mouvement des étoiles doubles, considéré comme propre à fournir la preuve de l'universalité des lois de la gravitation planétaire*..... 71

*Les observations d'étoiles doubles ne peuvent pas fournir une preuve expérimentale de l'universalité des lois de la pesanteur, mais seulement de puissantes probabilités qui semblent commencer à se produire*..... *Ib.*

Détermination de l'intensité des forces centrales, dans une section conique dont les foyers ne coïncident pas avec le centre des forces..... 76

Cas où la section conique se réduit à une droite ne passant pas nécessairement par le centre des forces; cas où ce centre coïncide avec le centre de figure de la section conique..... 85

Pages.

*Méthode pour calculer les éléments des planètes, ou, plus généralement, des astres dont les orbites sont peu inclinées à l'écliptique, fondée sur l'emploi des dérivées relatives au temps, des trois premiers ordres de la longitude géocentrique et du premier ordre de la latitude..... 86*

Examen des méthodes proposées pour le calcul ou la correction des éléments, considérées au point de vue des applications; et nécessité, lorsqu'on fait usage des dérivées, d'employer la troisième dérivée de la longitude (nos 1, 2 et 3)..... 86 à 91

Notations employées dans ce Mémoire (n° 4)..... 91

Dérivées de la longitude et du rayon vecteur terrestres déduites de trois rayons vecteurs rectangulaires (n° 6)..... 95

Formation de l'équation finale (n° 10)..... 100

Dérivées du rayon vecteur de la planète et de sa distance projetée à la Terre. Cas de l'opposition et de la station en longitude (n° 11)..... 105

Calcul des coordonnées, des composantes de la vitesse parallèles aux axes coordonnés, et des éléments de l'orbite (n° 12)..... 114

Formules ayant pour objet de déduire les dérivées de la longitude et de la latitude par rapport au temps, des éléments de l'orbite supposés donnés (nos 13 et 14)..... 119 et 121

Correction des éléments de l'orbite (n° 15)..... 126

Interpolation (n° 16)..... 128

MÉTHODE D'INTERPOLATION DE M. CAUCHY..... 129

Son application aux questions de mécanique, physique, astronomie, etc.; formation des équations linéaires (n° 17)..... *Ib.*

Expression d'une partie des coefficients inconnus en fonctions des autres coefficients, ceux-ci restant indéterminés (n° 22)..... 139

Tableau synoptique des formules tirées de la méthode d'interpolation de M. Cauchy (n° 23)..... 141

Application de la méthode d'interpolation de M. Cauchy, au développement des longitude et latitude géocentriques suivant les puissances du temps (n° 24)..... 142

Résumé des formules propres à la détermination des éléments des orbites des planètes..... 143

Calcul des éléments approchés (n° 25 et suivants)..... *Ib.*

Correction des éléments approchés (n° 31)..... 153

Formules d'interpolation des éphémérides calculées de cinq en cinq jours, pour en déduire les positions de jour en jour..... 154

Application numérique à la planète Iris, de la *méthode pour calculer les éléments des planètes* (n° 34)..... 159

Éléments de l'orbite d'Iris, et comparaison avec les positions normales (n° 42). 191

Recherche et observation d'Iris à l'aide de ces éléments, huit mois et demi après l'époque de sa disparition..... 191 et 192

Motifs de la forme donnée à ce Mémoire; son analogie avec les deux Mémoires sur les étoiles doubles..... 193 et 194

Pages.

*Note relative à l'application des formules du premier Mémoire sur les étoiles doubles, au cas des orbites dont le plan coïncide, ou à peu près, avec le rayon visuel* ..... 195

*Note sur les différences constantes des distances d'étoiles doubles mesurées par MM. W. Struve et Otto Struve* ..... 197

## *ERRATA.*

Page 14, ligne 4, *au lieu de* l'équation (28), *lisez* l'équation (26).

Page 37, ligne 7, en remontant, *au lieu de* et $\frac{dx}{dt}$, *lisez* et $\frac{ds}{dt}$.

Page 187, ligne 9, *au lieu de* $= 0{,}000\ 0002 +$, *lisez* $= 0{,}000\ 0002$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER, RUE DU JARDINET, N° 12.

# PREMIER MÉMOIRE

SUR LES

# ÉTOILES DOUBLES,

Par M. YVON VILLARCEAU.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 26 mars 1849.)

## *Méthode pour calculer les orbites relatives des étoiles doubles.*

1. En présentant à l'Académie le résultat de mes recherches sur le mouvement de ζ d'Hercule, j'ai dit que j'y étais parvenu en faisant usage d'une méthode particulière. L'objet de la présente communication est d'établir les formules sur lesquelles repose cette méthode, me proposant d'entrer plus tard dans les détails convenables pour en bien faire comprendre l'application.

Soient $m'$ et $m''$ les masses de l'étoile principale et de son satellite, et à l'époque $t$ :

$r''$ leur distance mutuelle;

Z la distance de l'étoile principale à la Terre;

$x''$, $y''$, $z''$ les coordonnées rectangulaires de $m''$ parallèles à trois axes passant par $m'$. La direction de l'axe des $z$ est celle du prolongement de Z, et les axes des $x$ et des $y$ sont situés dans le plan perpendiculaire au rayon visuel, de manière que l'axe des $x$ soit en réalité dirigé vers le Nord, et celui des $y$ vers l'Est.

Nous ferons abstraction de la variation de la distance Z et de celle du plan des $x\,y$. Quant au déplacement de l'axe des $x$ dans le même plan, nous supposerons qu'on en ait tenu compte en corrigeant les angles de position de l'effet de la précession, celui de la nutation étant ici tout à fait insensible.

Soient $x$, $y$, $z$, $r$ les nombres de $1''$ correspondants aux coordonnées $x''$, $y'$, $z''$ et à la distance réelle $r''$, de manière qu'en désignant par R la distance moyenne de la Terre au Soleil, et par $\varpi'$ la parallaxe de $m'$, on ait

$$x''=x\,\mathrm{Z}\tang 1'',\quad y''=y\,\mathrm{Z}\tang 1'',\quad z''=z\,\mathrm{Z}\tang 1'',\quad r''=r\,\mathrm{Z}\tang 1''.$$

Soient d'ailleurs $M+m$ la somme des masses du Soleil et de la Terre, $N'$ le moyen mouvement terrestre, $f$ le coefficient de l'attraction universelle; on a

$$R^3 N'^2 = f(M+m); \tag{1}$$

on a aussi

$$R = \varpi' Z \operatorname{tang} 1''; \tag{2}$$

ce qui donne d'abord

$$x'' = \frac{R}{\varpi'} x, \quad y'' = \frac{R}{\varpi'} y, \quad z'' = \frac{R}{\varpi'} z; \quad r'' = \frac{R}{\varpi'} r.$$

L'équation différentielle du mouvement relatif de $m''$ projeté sur l'axe des $x$, est

$$\frac{d^2 x''}{dt^2} + f(m'+m'')\frac{x''}{r''^3} = 0;$$

elle devient, à cause des valeurs précédentes,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f\frac{(m'+m'')}{\left(\frac{R}{\varpi'}\right)^3}\frac{x}{r^3} = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$\mu = f(m'+m'')\left(\frac{\varpi'}{R}\right)^3; \tag{3}$$

en éliminant $f$ entre (1) et (3), il vient

$$\mu = \frac{m'+m''}{M+m} N'^2 \varpi'^3. \tag{4}$$

La quantité $\mu$ sera déterminée plus loin; et si l'on connaît la parallaxe $\varpi'$, l'équation (4) fera connaître ensuite le rapport de la somme des masses des deux étoiles à la somme des masses du Soleil et de la Terre.

2. Revenons à notre objet. La relation (3) permet de donner à l'équation différentielle ci-dessus, et aux deux autres équations semblables qui se rapportent aux coordonnées $y$ et $z$, la forme suivante, sous laquelle on présente ordinairement ces équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \mu\dfrac{x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} + \mu\dfrac{y}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} + \mu\dfrac{z}{r^3} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Actuellement, soient : $\alpha$ l'angle de position compté de $x$ vers $y$ ; $\rho$ la projection du rayon vecteur $r$ sur le plan des $xy$, ou la distance apparente des étoiles ; $\lambda$ l'angle de $r$ avec sa projection $\rho$ ; nous aurons

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\alpha, \\ y = \rho\sin\alpha, \\ z = \rho\,\mathrm{tang}\,\lambda, \\ r = \dfrac{\rho}{\cos\lambda}. \end{cases}$$

Nous allons former les dérivées de ces quantités par rapport au temps ; la dernière ne nous servira pas immédiatement. Il viendra d'abord :

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \cos\alpha\dfrac{d\rho}{dt} - \sin\alpha.\rho\dfrac{d\alpha}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin\alpha\dfrac{d\rho}{dt} + \cos\alpha.\rho\dfrac{d\alpha}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \mathrm{tang}\,\lambda\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{\rho}{\cos^2\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}, \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{\cos\lambda}\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{\rho}{\cos\lambda}\,\mathrm{tang}\,\lambda\dfrac{d\lambda}{dt}. \end{cases}$$

Différentiant de nouveau les trois premières de ces équations, et substituant à la place de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ leurs valeurs en fonction de $\rho$, $\alpha$ et $\lambda$, tirées des équations (5) et (6), il viendra :

$$(8)\qquad \begin{cases} -\mu\dfrac{\cos^3\lambda}{\rho^2}\cos\alpha = \cos\alpha\dfrac{d^2\rho}{dt^2} - 2\sin\alpha\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt} - \cos\alpha.\rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} - \sin\alpha.\rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ -\mu\dfrac{\cos^3\lambda}{\rho^2}\sin\alpha = \sin\alpha\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + 2\cos\alpha\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt} - \sin\alpha.\rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} + \cos\alpha.\rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ -\mu\dfrac{\cos^3\lambda}{\rho^2}\mathrm{tang}\,\lambda = \mathrm{tang}\,\lambda\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + \dfrac{2}{\cos^2\lambda}\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\lambda}{dt} + \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,\lambda}{\cos^2\lambda}\rho\dfrac{d\lambda^2}{dt^2} + \dfrac{\rho}{\cos^2\lambda}\dfrac{d^2\lambda}{dt^2}. \end{cases}$$

Il convient de substituer à ces équations, de nouvelles équations plus simples. On y parvient d'abord en multipliant les deux premières par $\sin\alpha$ ou $\cos\alpha$, de manière à éliminer $\mu$ et à tirer sa valeur ; on a ainsi :

$$(9)\qquad \begin{cases} 0 = 2\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt} + \rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ \mu\dfrac{\cos^3\lambda}{\rho^2} = \rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} - \dfrac{d^2\rho}{dt^2}. \end{cases}$$

Multiplions maintenant la dernière de ces équations par $\tang\lambda$, et ajoutons membre à membre avec la troisième équation (8), nous aurons

$$0 = \tang\lambda . \rho \frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{2}{\cos^2\lambda} \frac{d\rho}{dt} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{2\tang\lambda}{\cos^2\lambda} \rho \frac{d\lambda^2}{dt^2} + \frac{\rho}{\cos^2\lambda} \frac{d^2\lambda}{dt^2},$$

ou, en multipliant par $\frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\rho}$,

$$(10) \qquad 0 = \sin^2\lambda \frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{2}{\rho} \tang\lambda \frac{d\rho}{dt} \frac{d\lambda}{dt} + 2\tang^2\lambda \frac{d\lambda^2}{dt^2} + \tang\lambda \frac{d^2\lambda}{dt^2}.$$

Le facteur commun $\sin\lambda$, introduit ici, prépare cette équation pour une élimination ultérieure. Les équations (9) et (10) sont les analogues de celles que l'on trouve dans la *Mécanique céleste*.

La première équation (9) montre, comme on le sait, que l'aire projetée décrite par le rayon vecteur croît proportionnellement au temps. En effet, cette équation, multipliée par $\frac{1}{2}\rho$, est la différentielle exacte de $\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\alpha}{dt}$; on a donc, en l'intégrant,

$$\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\alpha}{dt} = const.$$

Quant à la seconde équation (9), son premier membre étant essentiellement positif, il s'ensuit que le second doit l'être également. Les données de l'observation doivent donc satisfaire à la condition

$$(10\ bis) \qquad \frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2} > 0.$$

3. Les quantités $\alpha$, $\rho$ et leurs dérivées étant considérées comme fournies par les observations, les inconnues du problème sont les quantités $\mu$, $\lambda$, $\frac{d\lambda}{dt}$, $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$, au nombre de quatre, et contenues seulement dans la seconde équation (9) et l'équation (10). Pour les déterminer, nous avons besoin de nouvelles relations entre ces quantités. Or, la seconde équation (9) contenant $\lambda$, mais non point ses dérivées, il suffira de la différentier deux fois de suite.

Il viendra, par une première différentiation,

$$-\mu\left(3\frac{\cos^2\lambda}{\rho^2}\sin\lambda\frac{d\lambda}{dt} + 2\frac{\cos^3\lambda}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt^2} + 2\rho\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{d^3\rho}{dt^3},$$

ou, à cause de la première équation (9), et en changeant les signes,

$$(11)\qquad \mu\frac{\cos^3\lambda}{\rho^2}\left(3\tang\lambda\frac{d\lambda}{dt}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)=\frac{d^3\rho}{dt^3}+3\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt^2}.$$

Différentions de nouveau cette équation :

$$\mu\frac{\cos^3\lambda}{\rho^2}\left(\frac{3}{\cos^2\lambda}\frac{d\lambda^2}{dt^2}+3\tang\lambda\frac{d^2\lambda}{dt^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{d\rho^2}{dt^2}\right)$$
$$-\mu\frac{\cos^3\lambda}{\rho^2}\left(3\tang\lambda\frac{d\lambda}{dt}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)^2=\frac{d^4\rho}{dt^4}+3\frac{d^2\rho}{dt^2}\frac{d\alpha^2}{dt^2}+6\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Développons, puis éliminons $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ et $\mu\frac{\cos^3\lambda}{\rho^2}$ à l'aide des équations (9), nous aurons

$$\left(\rho\frac{d\alpha^2}{dt^2}-\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)\left[\begin{array}{l}\frac{3}{\cos^2\lambda}(1-3\sin^2\lambda)\frac{d\lambda^2}{dt^2}-12\frac{\tang\lambda}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt}+3\tang\lambda\frac{d^2\lambda}{dt^2}\\ +\frac{2}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}-\frac{6}{\rho^2}\frac{d\rho^2}{dt^2}\end{array}\right]$$
$$=\frac{d^4\rho}{dt^4}+3\frac{d^2\rho}{dt^2}\frac{d\alpha^2}{dt^2}-\frac{12}{\rho}\frac{d\rho^2}{dt^2}\frac{d\alpha^2}{dt^2}.$$

Posons, pour simplifier,

$$(12)\quad 3k=\frac{1}{\rho\frac{d\alpha^2}{dt^2}-\frac{d^2\rho}{dt^2}}\left(\frac{d^4\rho}{dt^4}+3\frac{d^2\rho}{dt^2}\frac{d\alpha^2}{dt^2}-\frac{12}{\rho}\frac{d\rho^2}{dt^2}\frac{d\alpha^2}{dt^2}\right)+\frac{6}{\rho^2}\frac{d\rho^2}{dt^2}-\frac{2}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2};$$

à cause de

$$\frac{1-3\sin^2\lambda}{\cos^2\lambda}=\frac{\cos^2\lambda-2\sin^2\lambda}{\cos^2\lambda}=1-2\tang^2\lambda,$$

l'équation précédente se réduira à

$$3(1-2\tang^2\lambda)\frac{d\lambda^2}{dt^2}-\frac{12}{\rho}\tang\lambda\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt}+3\tang\lambda\frac{d^2\lambda}{dt^2}=3k,$$

ou, en divisant par 3, et passant tous les termes dans un même membre,

$$(13)\qquad 0=(2\tang^2\lambda-1)\frac{d\lambda^2}{dt^2}+\frac{4}{\rho}\tang\lambda\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt}-\tang\lambda\frac{d^2\lambda}{dt^2}+k.$$

Cette équation, en y tenant compte de la valeur ci-dessus de $3k$, et l'équation (11), sont celles qu'il s'agissait de former.

4. Nous allons maintenant résoudre ces équations. Pour cela, éliminons

d'abord $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$, en ajoutant membre à membre les équations (10) et (13); il viendra

$$(14)\qquad (4\tang^2\lambda - 1)\frac{d\lambda^2}{dt^2} + \frac{6}{\rho}\tang\lambda\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + \sin^2\lambda\frac{d\alpha^2}{dt^2} + k = 0.$$

D'un autre côté, après avoir éliminé $\mu$ de l'équation (11) par la seconde équation (9), on tire

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{3\tang\lambda}\left(\frac{\frac{d^3\rho}{dt^3} + 3\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt^2}}{\rho\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{d^2\rho}{dt^2}} - \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right).$$

Posons

$$(15)\qquad 3k' = \frac{\frac{d^3\rho}{dt^3} + 3\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt^2}}{\rho\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{d^2\rho}{dt^2}} - \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

la précédente donnera

$$(15\ bis)\qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{k'}{\tang\lambda}.$$

Nous remarquerons de suite que les expressions $3k$ et $3k'$ ne renferment que des quantités connues.

Portons la valeur que nous venons de former de $\frac{d\lambda}{dt}$, dans l'équation (14), et écrivons $\frac{\tang^2\lambda}{1+\tang^2\lambda}$ à la place de $\sin^2\lambda$, nous aurons

$$\frac{4\tang^2\lambda - 1}{\tang^2\lambda}k'^2 + \frac{6}{\rho}\frac{d\rho}{dt}k' + \frac{\tang^2\lambda}{1+\tang^2\lambda}\frac{d\alpha^2}{dt^2} + k = 0.$$

Faisant disparaître les dénominateurs et ordonnant par rapport à $\tang^2\lambda$; il vient

$$\left(4k'^2 + 6\frac{k'}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\alpha^2}{dt^2} + k\right)\tang^4\lambda + \left(3k'^2 + 6\frac{k'}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + k\right)\tang^2\lambda - k'^2 = 0.$$

Enfin, posant

$$(16)\qquad \begin{cases} Q = 3k'^2 + 6\frac{k'}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + k, \\ Q' = Q + k'^2 + \frac{d\alpha^2}{dt^2}; \end{cases}$$

il vient finalement

$$(17)\qquad Q'\tang^4\lambda + Q\tang^2\lambda - k'^2 = 0.$$

Telle est l'équation qui fera connaître $\lambda$; $\frac{d\lambda}{dt}$ se déduira ensuite de l'une des équations (14) ou (15 *bis*). La seconde équation (9) donnera $\mu$. Nous ne dirons rien de $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ dont nous n'avons pas besoin.

Pour discuter l'équation précédente, il est indispensable de connaître le signe de Q'. Nous allons voir que, d'après la nature de la question, Q' est nécessairement positif. Pour cela, substituons dans l'équation (14), à la place de $\text{tang}\,\lambda\,\frac{d\lambda}{dt}$, la quantité $k'$, équation (15 *bis*); il viendra

$$4k'^2 - \frac{d\lambda^2}{dt^2} + 6\frac{k'}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{d\alpha^2}{dt^2}\cos^2\lambda + k = 0,$$

d'où l'on tire, en vertu des équations (16),

$$Q' = \frac{d\lambda^2}{dt^2} + \cos^2\lambda\,\frac{d\alpha^2}{dt^2}; \tag{18}$$

c'est le carré de la vitesse angulaire du rayon vecteur.

Q' est donc nécessairement une quantité positive.

Notons en passant que l'équation (18) pourra être plus propre à fournir la valeur de $\frac{d\lambda}{dt}$ que l'équation (16); celle-ci serait toutefois indispensable pour donner le signe de $\frac{d\lambda}{dt}$.

Q' étant positif, tandis que le terme connu de l'équation (17) est négatif; cette équation, considérée comme du deuxième degré en $\text{tang}^2\lambda$, a nécessairement ses racines réelles et de signes contraires. Or $\text{tang}^2\lambda$ devant être positif, on voit que cette quantité n'est susceptible que d'une valeur unique. La résolution de l'équation (17) donne, en se bornant à la racine positive,

$$\text{tang}^2\lambda = \frac{\sqrt{Q^2 + 4Q'k'^2} - Q}{2Q'}. \tag{19}$$

L'angle $\lambda$ est compris entre $+90^\circ$ et $-90^\circ$. L'équation précédente donne deux valeurs égales et de signes contraires pour cet angle; cela tient à ce que la projection du rayon vecteur que nous observons est la même lorsque l'angle $\lambda$ est positif et lorsqu'il est négatif: le choix reste donc arbitraire. Le changement de signe de $\lambda$ donnerait une orbite symétrique, par rapport au plan de projection, avec celle que donne le signe opposé.

8. Connaissant $\lambda$ et $\frac{d\lambda}{dt}$, il est facile de calculer les éléments de l'orbite.

En désignant par G, G′, G″ les constantes des aires, on a

$$G = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt},$$

$$G' = z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt},$$

$$G'' = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

La valeur des seconds membres de ces équations étant formée au moyen des équations (6) et (7), si l'on divise tout par $\rho^2$, et que l'on pose

$$(19\,bis) \qquad S = \frac{G}{\rho^2}, \quad S' = \frac{G'}{\rho^2}, \quad S'' = \frac{G''}{\rho^2},$$

il viendra

$$(20) \qquad \begin{cases} S = \sin\alpha \dfrac{\dfrac{d\lambda}{dt}}{\cos^2\lambda} - \cos\alpha \operatorname{tang}\lambda \dfrac{d\alpha}{dt}, \\ S' = -\cos\alpha \dfrac{\dfrac{d\lambda}{dt}}{\cos^2\lambda} - \sin\alpha \operatorname{tang}\lambda \dfrac{d\alpha}{dt}, \\ S'' = \dfrac{d\alpha}{dt}. \end{cases}$$

On en déduit la longitude du nœud ascendant $\Omega$, par la formule

$$(21) \qquad \operatorname{tang}\Omega = -\frac{S}{S'},$$

en ayant le soin de prendre $\Omega$ de manière que son sinus ait le signe de S.

L'inclinaison I, supposée comprise entre o et 180 degrés, se tire de l'une des formules suivantes :

$$(22) \qquad \operatorname{tang} I = \frac{\sqrt{S^2+S'^2}}{S''} = \frac{S}{S''\sin\Omega} = -\frac{S'}{S''\cos\Omega}.$$

Soient : A le demi-grand axe, et Π le demi-paramètre; on a la formule

$$\Pi = \frac{G^2+G'^2+G''^2}{\mu},$$

ou, en vertu des équations (19 *bis*),

$$\Pi = \frac{\rho^4}{\mu}(S^2+S'^2+S''^2),$$

ou bien encore

$$\frac{\Pi}{\rho} = \frac{S^2 + S'^2 + S''^2}{\frac{\mu}{\rho^3}}. \tag{23}$$

En substituant dans cette équation les valeurs (20), on obtient l'expression de $\frac{\Pi}{\rho}$ sous une autre forme, ce qui donne un moyen de vérifier les calculs numériques.

On en déduit immédiatement

$$\frac{\Pi}{\rho} = \frac{1}{\cos^4\lambda} \frac{\frac{d\lambda^2}{dt^2} + \cos^2\lambda \frac{d\alpha^2}{dt^2}}{\frac{\mu}{\rho^3}},$$

ou, en vertu de l'équation (18),

$$\frac{\Pi}{\rho} = \frac{1}{\cos\lambda} \frac{Q'}{\mu \frac{\cos^3\lambda}{\rho^3}},$$

puis, en ayant égard à la seconde équation (9), et observant que $\rho = r\cos\lambda$,

$$\frac{\Pi}{r} = \frac{\Pi}{\rho}\cos\lambda = \frac{Q'}{\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}}. \tag{24}$$

On a maintenant, pour calculer le demi-grand axe, l'équation des forces vives

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{A}\right),$$

dans laquelle $ds$ exprime l'arc élémentaire parcouru pendant le temps $dt$.

L'expression de $\frac{ds^2}{dt^2}$ peut être formée, soit au moyen des coordonnées polaires, soit au moyen des coordonnées rectangulaires: en faisant usage des premières, et $v$ désignant la *longitude dans l'orbite*, on a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = r^2\frac{dv^2}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2};$$

mais

$$\frac{dv^2}{dt^2} = \frac{d\lambda^2}{dt^2} + \cos^2\lambda\frac{d\alpha^2}{dt^2} = Q',$$

en vertu de l'équation (18). D'un autre côté, la quatrième équation (7), en

Ces équations donnent, par division, tang V; et l'on en conclut V sans ambiguïté, les signes de sin V et de cos V étant ceux de leurs seconds membres. L'excentricité E en résulte : la valeur obtenue de cette quantité peut servir utilement de vérification à celle qu'aura fournie l'équation (28), ou lui être préférée, si la première se trouve mal déterminée.

Il ne sera peut-être pas hors de propos de montrer la concordance des équations (26) et (27).

Reprenons l'équation (26)

$$1 - E^2 = \frac{\Pi}{r}\,\frac{\rho}{A\cos\lambda}.$$

Substituons-y les expressions (24) et (25), nous aurons

$$1 - E^2 = \frac{Q'}{\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}}\left[2 - \frac{Q' + \left(k' + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)^2}{\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}}\right].$$

D'autre part, élevons au carré les deux membres des équations (27), et ajoutons, il viendra

$$E^2 = \frac{Q'\left(k' + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)^2} + \left(\frac{\Pi}{r}\right)^2 - 2\frac{\Pi}{r} + 1,$$

et l'on aura

$$1 - E^2 = \frac{\Pi}{r}\left(2 - \frac{\Pi}{r}\right) - \frac{Q'\left(k' + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)^2}.$$

En substituant la valeur (24) de $\frac{\Pi}{r}$, il vient

$$1 - E^2 = \frac{Q'}{\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}}\left[2 - \frac{Q' + \left(k' + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)^2}{\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}}\right],$$

comme ci-dessus.

Maintenant, nous avons à déduire le moyen mouvement N. Nous partirons de la formule connue

(27 *bis*) $$A^3 N^2 = \mu,$$

dans laquelle N est supposé exprimé en nombres abstraits. On en tire

$$N^2 = \frac{\mu}{A^3} = \mu \frac{\cos^3 \lambda}{\rho^3} \left( \frac{\rho}{A \cos \lambda} \right)^3 ;$$

d'où, par la seconde équation (9),

$$N = \sqrt{\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2}} \left( \frac{\rho}{A \cos \lambda} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{28}$$

Pour faire usage de cette formule, la quantité $\frac{\rho}{A \cos \lambda}$ peut être tirée de l'équation (25), et être employée si elle n'est pas trop mal déterminée. Autrement, ayant déduit E des équations (27), on se servirait de l'équation (26), mise sous la forme suivante :

$$\frac{\rho}{A \cos \lambda} = \frac{1 - E^2}{\frac{\Pi}{r}}. \tag{29}$$

Le moyen mouvement, l'excentricité et l'anomalie vraie étant calculés, on aura aisément l'époque du passage au périhélie, ou l'anomalie moyenne, par les formules bien connues

$$\begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - E}{1 + E}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} V, \\ N t + \varepsilon - \varpi = u - E \sin u, \\ N (t - \tau) = u - E \sin u. \end{cases} \tag{30}$$

Dans ces formules, $u$ désigne l'anomalie excentrique, $\varepsilon - \varpi$ l'anomalie moyenne de l'époque, et $\tau$ l'époque du passage au périhélie. L'origine du temps, dans la deuxième, est comptée à partir de l'époque; dans la troisième, elle est quelconque.

On peut obtenir une vérification, en se servant de la formule également connue

$$\frac{r}{A} = \sqrt{1 - E^2} \frac{\sin u}{\sin V},$$

qui donne, en vertu de l'équation (26),

$$\frac{\Pi}{r} \sin u - \sqrt{1 - E^2} \sin V = 0. \tag{31}$$

La durée de la révolution se déduit de la valeur de N, et l'on a

$$T = \frac{2\pi}{N}. \tag{31 bis}$$

7. En désignant toujours par $v$ la longitude dite *dans l'orbite*, par $\varpi$ la longitude du périhélie comptée de la même manière; les distances du satellite et du périhélie au nœud ascendant seront $v - \Omega$ et $\varpi - \Omega$, de sorte que l'on aura

$$v - \Omega = \varpi - \Omega + V.$$

On calculera $v - \Omega$ par la formule

$$\tan(v - \Omega) = \frac{\tan(\alpha - \Omega)}{\cos I}, \tag{32}$$

en ayant soin de prendre $v - \Omega$, de sorte que son cosinus ait le signe de $\cos(\alpha - \Omega)$: le dernier élément à déterminer, la distance du périhélie au nœud, s'en déduira, à l'aide de la relation

$$\varpi - \Omega = v - \Omega - V. \tag{33}$$

Les formules suivantes fourniront utilement des vérifications,

$$\begin{cases} \tan\lambda = \sin(\alpha - \Omega)\tan I, \\ \sin\lambda = \sin(v - \Omega)\sin I. \end{cases} \tag{34}$$

Enfin, si l'on connaît la parallaxe $\varpi'$, on aura, par l'équation (4), le rapport de la somme des masses des deux étoiles à celles réunies du Soleil et de la Terre,

$$\frac{m' + m''}{M + m} = \frac{\mu}{N'^2 \varpi'^3}.$$

Cette équation donne, à cause de l'équation (27 *bis*),

$$\frac{m' + m''}{M + m} = \frac{N^2}{N'^2}\frac{A^3}{\varpi'^3};$$

on peut la mettre sous une autre forme en introduisant les durées des révolutions à la place des moyens mouvements; en effet, l'on a

$$\frac{N}{N'} = \frac{T'}{T},$$

ce qui donne

$$\frac{m' + m''}{M + m} = \left(\frac{T'}{T}\right)^2 \left(\frac{A}{\varpi'}\right)^3. \tag{34 bis}$$

## *Relations entre les dérivées de l'angle de position et celles de la distance.*

8. Nous avons dit que nous considérions les quantités $\alpha$, $\rho$ et leurs dérivées comme étant fournies par l'observation; ajoutons que toute la difficulté du problème se trouve réduite à la détermination de ces quantités. Nous sommes

obligés d'avoir recours à l'interpolation pour les obtenir, et nous considérons la méthode proposée par M. Cauchy comme très-utilement applicable dans le cas actuel; mais, pour mieux faire comprendre le parti que l'on en peut tirer, il convient de présenter certaines relations fort importantes qui existent entre les dérivées de l'angle de position et celles de la distance.

A cet effet, supposons que l'on représente par des séries ordonnées, suivant les puissances du temps, les angles de position et les distances, ou que l'on pose

$$(35)\qquad \begin{cases} \alpha = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 + gt^6 + \ldots, \\ \rho = a' + b't + c't^2 + d't^3 + e't^4 + f't^5 + \ldots. \end{cases}$$

Nous avons trouvé, entre les données de l'observation, une équation de condition exprimant que la projection des aires décrites par unité de temps est constante. C'est la première équation (9). Divisons ses deux membres par 2, elle deviendra

$$(36)\qquad 0 = \frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{2}\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Il faut que les dérivées de $\alpha$ et de $\rho$, tirées des équations (35), satisfassent à cette dernière. Différentiant ces équations, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3 + 5ft^4 + 6gt^5 + \ldots,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = b' + 2c't + 3d't^2 + 4e't^3 + 5f't^4 + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = c + 3dt + 6et^2 + 10ft^3 + 15gt^4 + \ldots.$$

En effectuant les produits indiqués dans le second membre de l'équation (36), il vient

$$\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = \begin{array}{r|l|l|l|l} b'b & t & t^2 & t^3 & t^4 + \ldots, \\ +2b'c & +3b'd & +4b'e & +5b'f & \\ +2c'b & +4c'c & +6c'd & +8c'e & \\ & +3d'b & +6d'c & +9d'd & \\ & & +4e'b & +8e'c & \\ & & & +5f'b & \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \begin{array}{r|l|l|l|l} a'c & t & t^2 & t^3 & t^4 + \ldots. \\ +3a'd & +6a'e & +10a'f & +15a'g & \\ +b'c & +3b'd & +6b'e & +10b'f & \\ & +c'c & +3c'd & +6c'e & \\ & & +d'c & +3d'd & \\ & & & +e'c & \end{array}$$

Si nous ajoutons les seconds membres de ces équations et que nous les égalions à zéro, en vertu de l'équation (36), nous aurons une relation qui devra être satisfaite quelle que soit la valeur de $t$; il en résulte que les coefficients des diverses puissances de $t$ doivent être séparément nuls. On a donc les conditions suivantes :

$$(37)\quad \begin{cases} 0 = a'c + b'b, \\ 0 = 3a'd + 3b'c + 2c'b, \\ 0 = 6a'e + 6b'd + 5c'c + 3d'b, \\ 0 = 10a'f + 10b'e + 9c'd + 7d'c + 4e'b, \\ 0 = 15a'g + 15b'f + 14c'e + 12d'd + 9e'c + 5f'b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La composition littérale des termes de ces équations est facile à saisir; quant à la loi des coefficients numériques, elle est aussi très-simple. En considérant la succession de ces derniers dans le sens vertical, on passe des coefficients de la première équation à ceux de la deuxième, en ajoutant deux unités à ceux de la première, et supposant d'ailleurs le second membre de celle-ci suivi d'un terme dont le coefficient soit égal à zéro. Les coefficients de la troisième équation se forment en ajoutant, de la même manière, trois unités à ceux de la deuxième. On forme les coefficients de la quatrième en ajoutant quatre unités aux coefficients de la troisième, et ainsi de suite.

Considérons maintenant spécialement les valeurs des dérivées de $\alpha$ et de $\rho$ à l'origine du temps; nous aurons

$$(38)\quad \begin{cases} a = \alpha, \quad b = \dfrac{d\alpha}{dt}, \quad c = \dfrac{1}{1.2}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad d = \dfrac{1}{1.2.3}\dfrac{d^3\alpha}{dt^3}, \quad e = \dfrac{1}{1.2.3.4}\dfrac{d^4\alpha}{dt^4}, \ldots \\ a' = \rho, \quad b' = \dfrac{d\rho}{dt}, \quad c' = \dfrac{1}{1.2}\dfrac{d^2\rho}{dt^2}, \quad d' = \dfrac{1}{1.2.3}\dfrac{d^3\rho}{dt^3}, \quad e' = \dfrac{1}{1.2.3.4}\dfrac{d^4\rho}{dt^4}, \ldots \end{cases}$$

Quoique les équations (37) soient des relations entre les valeurs des dérivées de $\alpha$ et de $\rho$ à l'origine du temps, en vertu des équations (38), il ne s'ensuit pas que ces relations soient aussi limitées, car l'origine du temps est arbitraire. Elles ont donc encore lieu lorsque les quantités $a, b, c, \ldots,$ $a', b', c', \ldots,$ sont supposées représenter les valeurs de $\alpha$, $\rho$ et de leurs dérivées à une époque quelconque.

Posons maintenant, pour simplifier,

$$(39)\qquad b'' = \frac{b'}{a'}, \quad c'' = \frac{c'}{a'}, \quad d'' = \frac{d'}{a'}, \quad e'' = \frac{e'}{a'}, \ldots,$$

les équations (38) donneront

$$(40)\quad b''=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},\quad 2c''=\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2},\quad 6d''=\frac{1}{\rho}\frac{d^3\rho}{dt^3},\quad 24e''=\frac{1}{\rho}\frac{d^4\rho}{dt^4},\ldots,$$

et les équations (37) se changeront en

$$(41)\quad \begin{cases} 0 = c + b''b, \\ 0 = 3d + 3b''c + 2c''b, \\ 0 = 6e + 6b''d + 5c''c + 3d''b, \\ 0 = 10f + 10b''e + 9c''d + 7d''c + 4c''b, \\ 0 = 15g + 15b''f + 14c''e + 12d''d + 9e''c + 5f''b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les expressions (40) vont nous permettre de donner une forme plus simple à plusieurs des fonctions que nous avons employées. Il vient d'abord

$$(42)\quad \frac{d\alpha^2}{dt^2}-\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}=b^2-2c'',$$

et, en vertu des équations (9) et (10 *bis*),

$$(43)\quad \mu\frac{\cos^3\lambda}{\rho^3}=b^2-2c''>0.$$

Maintenant, l'équation (12) donne, en divisant par $\rho$ le numérateur et le dénominateur du premier terme de son second membre,

$$3k=\frac{1}{b^2-2c''}(24e''+6b^2c''-12b^2b''^2)+6b''^2-4c''.$$

En réduisant au même dénominateur, et divisant par 3, il vient

$$(44)\quad k=\frac{2}{b^2-2c''}\left[4e''+\frac{1}{3}c''(b^2+4c'')-b''^2(b^2+2c'')\right].$$

Transformons de même l'équation (15), nous aurons

$$3k'=\frac{1}{b^2-2c''}(6d''+3b^2b'')-2b'',$$

et, finalement, toutes réductions faites,

$$(45)\quad k'=\frac{1}{b^2-2c''}\left[2d''+\frac{1}{3}b''(b^2+4c'')\right].$$

Les équations (16) donneront de même

$$(46)\quad \begin{cases} Q = 3k'^2+6k'b''+k, \\ Q' = Q+k'^2+b^2. \end{cases}$$

On aura encore

$$k' + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = k' + b''. \tag{47}$$

9. Nous avons vu comment la détermination de $\operatorname{tang}\lambda$, $\frac{d\lambda}{dt}$ et, par suite, celle des éléments, dépend des fonctions $k$, $k'$, Q, Q'. Nous remarquerons, en outre, que ces fonctions ne contiennent d'autres coefficients du développement de $\alpha$, que le coefficient $b$. La constante $a$ ou $\alpha$ entre dans les fonctions S, S' et dans le second membre de l'équation (32), de sorte que deux positions très-voisines suffiraient, à la rigueur, pour déterminer $a$ et $b$; mais les coefficients du développement de $\rho$ ou leurs équivalents $b''$, $c''$, etc., vont jusqu'à $e'$ ou $e''$. Il faudrait donc de même cinq observations de distances pour les déterminer.

Ainsi, il semble que nos formules ne sont applicables qu'au cas où les données seraient deux angles de position et cinq distances au moins. Il n'en est rien. Par exemple, on pourra déterminer tous les éléments, sauf le demi-grand axe, au moyen des angles de position, s'ils sont au nombre de six au moins. En effet, on en déduira les six coefficients $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$; et les quatre premières équations (41) permettront de calculer successivement les coefficients $b''$, $c''$, $d''$, $e''$ qui entrent dans nos formules, à l'exclusion des coefficients $c$, $d$, $e$ et $f$.

Souvent il conviendra de substituer de cette manière les angles de position aux distances, et il suffira, en toute rigueur, d'une seule distance pour faire connaître le demi-grand axe; car, déduisant $\frac{\rho}{A}$ de nos formules, on aura

$$A = \frac{\rho}{\left(\frac{\rho}{A}\right)} = \frac{a'}{\left(\frac{\rho}{A}\right)}. \tag{48}$$

La meilleure détermination des coefficients $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ s'obtiendra en faisant usage de la méthode d'interpolation de M. Cauchy, si les observations ne sont pas trop irrégulièrement espacées. Cependant les observations d'étoiles doubles que l'on possède aujourd'hui ne permettront peut-être pas de déterminer tous les coefficients dont on a besoin. Il faut remarquer que nous n'entendons parler ici que des observations modernes qui, seules, forment des suites assez régulières pour que l'interpolation soit praticable. La série des observations de $\zeta$ d'Hercule, par MM. Struve, laisse un coefficient indéterminé, dont la valeur se trouve ensuite fixée par la condition que les éléments représentent une ancienne observation d'Herschel ou une observation isolée de M. Struve, en 1826. Or il arrive qu'en disposant de l'indéterminée de

manière à satisfaire à l'une de ces observations, on satisfait en même temps à l'autre, du moins approximativement.

Si les mesures de distances sont assez précises, comme le sont généralement celles de MM. Struve, on peut employer à la fois les angles de position et les distances. Les indéterminées que peuvent contenir leurs développements se tirent ensuite de la condition de satisfaire aux équations (41). Les nombres particuliers d'indéterminées admises dans chacun des développements en question, donnent naissance à divers problèmes qui conduisent à des équations plus ou moins compliquées suivant les cas. C'est dans la formation et la résolution de ces équations, que l'habileté de l'astronome peut se donner carrière, le reste n'étant plus qu'un simple calcul numérique.

Nous allons maintenant présenter un résumé des formules à appliquer, dans l'ordre où ces formules doivent être calculées. Les simplifications du n° 8 y seront introduites. Ajoutons que plusieurs quantités seront données sous des formes différentes, dans le but de fournir des moyens de vérifier les calculs.

## *Résumé des formules propres à la détermination des éléments des orbites relatives des étoiles doubles.*

**10.** Supposons que l'on ait déduit d'une méthode d'interpolation convenablement appliquée, les coefficients soit de la première des séries suivantes,

$$(\text{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 + \ldots, \\ \rho &= a' + b't + c't^2 + d't^3 + e't^4 + \ldots, \end{aligned}\right.$$

soit de toutes deux, et que l'on y fasse ensuite $t$ nul, les calculs se rapportant à l'origine du temps.

Si l'on n'a déterminé que les coefficients de la première, on se servira des quatre premières équations suivantes, pour calculer successivement $b''$, $c''$, $d''$, $e''$,

$$(\text{II})\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= c + b''b, \\ 0 &= 3d + 3b''c + 2c''b, \\ 0 &= 6e + 6b''d + 5c''c + 3d''b, \\ 0 &= 10f + 10b''e + 9c''d + 7d''c + 4e''b, \\ 0 &= 15g + 15b''f + 14c''e + 12d''d + 9e''c + 5f''b, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Dans le second cas, c'est-à-dire lorsqu'on aura aussi déterminé les coefficients

de la série qui représente les distances, comme l'on a

$$(\text{III}) \qquad b''=\frac{b'}{a'},\quad c''=\frac{c'}{a'},\quad d''=\frac{d'}{a'},\quad e''=\frac{e'}{a'},\quad f''=\frac{f'}{a'},\ldots,$$

il faudra que ces dernières valeurs satisfassent aux équations (II), ce qui n'aura généralement pas lieu en toute rigueur. Mais si l'on exprime les coefficients, soit de la première ou de la deuxième série, soit de toutes deux en fonctions d'indéterminées; la substitution de ces valeurs, dans les équations (III) et (II) ou plus simplement dans les équations (37), fournira de nouvelles équations dont la résolution fera connaître les valeurs de ces indéterminées, si leur nombre est égal à celui des équations auxquelles on peut avoir égard; autrement, il restera des équations de condition, ou bien le nombre des indéterminées sera simplement réduit.

Les coefficients $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, etc., pourront être exprimés en degrés et fractions de degré; mais quand on aura effectué le calcul des quantités $a$, $b$, $b''$, $c''$, $d''$, $e''$, il faudra convertir $b$ en nombres abstraits, ce qui se fera en multipliant par la valeur de 1 degré exprimée de la même manière.

Alors les données devront être telles, que l'on ait

$$(\text{IV}) \qquad b^2-2c''>0.$$

On calculera, s'il en est ainsi, les auxiliaires suivantes :

$$(\text{V}) \qquad \begin{cases} k=\dfrac{2}{b^2-2c''}\left[4e''+\dfrac{1}{3}c''(b^2+4c'')-b''^2(b^2+2c'')\right], \\ k'=\dfrac{1}{b^2-2c''}\left[2d''+\dfrac{1}{3}b''(b^2+4c'')\right], \\ Q=6k'b''+3k'^2+k, \\ Q'=Q+k'^2+b^2; \end{cases}$$

$$(\text{VI}) \qquad \text{condition} \quad Q'>0.$$

La condition, pour que l'orbite soit elliptique, est

$$(\text{VII}) \qquad \frac{\rho}{A\cos\lambda}=2-\frac{Q'+(k'+b'')^2}{b^2-2c''}>0.$$

Si les conditions (IV) et (VI) ne sont pas remplies, il est inutile d'aller plus loin. Il en sera de même, si l'on veut obtenir une orbite elliptique, lorsque la condition (VII) ne sera pas satisfaite.

La latitude $\lambda$ se tirera de

$$(\text{VIII}) \qquad \text{tang}^2\lambda=\frac{\sqrt{Q^2+4Q'k'^2}-Q}{2Q'}.$$

$\lambda$ devra être pris entre $+90^\circ$ et $-90^\circ$; on le fera, du reste, arbitrairement positif ou négatif.

La dérivée de $\lambda$, que nous désignerons par $\lambda'$, pour simplifier l'écriture, se déduira de l'une ou l'autre des deux formules

$$(\text{IX}) \qquad \lambda' = \frac{k'}{\operatorname{tang}\lambda}, \quad \lambda'^2 = Q' - b^2\cos^2\lambda.$$

La première donnera un résultat mal déterminé lorsque $\lambda$ sera petit; mais elle est indispensable pour donner le signe de $\lambda'$: la valeur absolue de cette quantité sera alors assez exactement donnée par la seconde.

Il viendra ensuite

$$(\text{X}) \qquad \frac{\mu}{\rho^3} = \frac{b^2 - 2c''}{\cos^3\lambda}.$$

Pour déterminer la position du plan de l'orbite, on aura

$$(\text{XI}) \qquad \begin{cases} S = \sin a \dfrac{\lambda'}{\cos^2\lambda} - \cos a \,.\, b \operatorname{tang}\lambda, \\ S' = -\cos a \dfrac{\lambda'}{\cos^2\lambda} - \sin a \,.\, b \operatorname{tang}\lambda, \end{cases}$$

ce qui donne, pour la longitude du nœud ascendant $\Omega$,

$$(\text{XII}) \qquad \operatorname{tang}\Omega = -\frac{S}{S'};$$

et il faudra prendre $\Omega$ de manière que son sinus ait le signe de S.

L'inclinaison I du plan de l'orbite supposée comprise entre o degré et 180 degrés, sera fournie par l'une des expressions suivantes:

$$(\text{XIII}) \qquad \operatorname{tang} I = \frac{\sqrt{S^2 + S'^2}}{b} = \frac{S}{b\sin\Omega} = -\frac{S'}{b\cos\Omega}.$$

Il va sans dire que l'on obtiendra la solution correspondante à la valeur de $\lambda$ qu'on aura négligée, en écrivant le signe $\pm$ devant la valeur de I tirée de (XIII), et conservant d'ailleurs toutes les autres déterminations numériques; cela résulte de la symétrie des deux orbites: seulement $\Omega$ pourra désigner le nœud descendant. Autrement, en appliquant les formules précédentes à l'autre signe de $\lambda$, I resterait positif, tandis que $\Omega$ et $\varpi - \Omega$ varieraient de 180 degrés. Quoi qu'il en soit, on continuera comme il suit:

$$(\text{XIV}) \qquad \frac{\Pi}{\rho} = \frac{S^2 + S'^2 + b^2}{\mu} = \frac{\left(\dfrac{b}{\cos I}\right)^2}{\dfrac{\mu}{\rho^3}} = \frac{1}{\cos\lambda}\frac{Q'}{b^2 - 2c''},$$

$$\text{(xv)} \qquad \frac{\Pi}{r} = \frac{\Pi}{\rho}\cos\lambda,$$

$$\text{(xvi)} \qquad \frac{\rho}{A\cos\lambda} = 2 - \frac{Q' + (k' + b'')^2}{b^2 - 2c''}.$$

Si l'on pose, suivant l'habitude, $\sin\eta = E$, on pourra tirer l'excentricité de la formule

$$\text{(xvii)} \qquad 1 - E^2 \quad \text{ou} \quad \cos^2\eta = \frac{\Pi}{r}\frac{\rho}{A\cos\lambda}.$$

Il pourra se faire que l'excentricité soit mieux déterminée par les formules suivantes, qui servent d'ailleurs à calculer l'anomalie vraie V, sans ambiguïté.

$$\text{(xviii)} \qquad \begin{cases} E\sin V = \sqrt{Q'}\,\dfrac{k' + b''}{b^2 - 2c''}, \\ E\cos V = \dfrac{\Pi}{r} - 1. \end{cases}$$

Si l'excentricité est mieux déterminée par ces formules que par les équations (xvi) et (xvii), il sera préférable de substituer à l'équation (xvi) la suivante, qui servira à calculer le demi-grand axe au moyen de la valeur de $\rho = a'$,

$$\text{(xix)} \qquad \frac{\rho}{A\cos\lambda} = \frac{1 - E^2}{\dfrac{\Pi}{r}}.$$

Le moyen mouvement exprimé en nombres abstraits sera

$$\text{(xx)} \qquad N = \sqrt{b^2 - 2c''}\left(\frac{\rho}{A\cos\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On pourra, si l'on veut, le convertir, ainsi que E, en degrés et fractions de degré; il suffira de diviser par la valeur numérique de l'angle 1 degré. La durée T de la révolution est

$$\text{(xxi)} \qquad T = \frac{2\pi}{N} = \frac{360^\circ}{N^\circ}.$$

On aura l'anomalie excentrique $u$ et l'anomalie moyenne de l'époque $\varepsilon - \varpi$, ou l'époque $\tau$ du passage au périhélie, par les formules connues

$$\text{(xxii)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}u = \dfrac{1}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}V, \\ Nt + \varepsilon - \varpi \text{ ou } N(t - \tau) = u - E\sin u, \end{cases}$$

et l'on pourra vérifier $u$ et E par la formule

$$\frac{\Pi}{r}\sin u - \cos\eta \sin V = 0. \qquad (\text{XXIII})$$

La distance $\upsilon - \Omega$ du satellite au nœud ascendant, dans l'orbite, se tirera de

$$\operatorname{tang}(\upsilon - \Omega) = \frac{\operatorname{tang}(a - \Omega)}{\cos I}; \qquad (\text{XXIV})$$

en prenant $\upsilon - \Omega$ de manière que son cosinus ait le signe de $\cos(a - \Omega)$. La distance du périhélie au nœud ascendant sera ensuite

$$\varpi - \Omega = \upsilon - \Omega - V, \qquad (\text{XXV})$$

et l'on aura, pour vérification, les deux équations

$$\begin{cases} \operatorname{tang}\lambda = \sin(a - \Omega)\operatorname{tang} I, \\ \sin\lambda = \sin(\upsilon - \Omega)\sin I. \end{cases} \qquad (\text{XXVI})$$

Enfin, si l'on connaît la parallaxe $\varpi'$, le rapport de la somme des masses des deux étoiles, à la somme des masses du Soleil et de la Terre, sera donné par la formule

$$\frac{m' + m''}{M + m} = \left(\frac{A}{\varpi'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2. \qquad (\text{XXVII})$$

**11.** En examinant les formules auxquelles nous sommes parvenu, on reconnaît qu'elles ne peuvent fournir de résultats précis, lorsque l'inclinaison est considérable. Elles n'en pourraient fournir absolument aucun, si le plan de l'orbite coïncidait avec le rayon visuel. Or on sait que, dans ce cas, il est nécessaire d'employer une donnée de plus.

J'ai aussi établi les équations qui se rapportent à cette circonstance; mais je ne les ai point encore appliquées. Néanmoins, j'en ferai l'objet d'une prochaine communication.

*Nota.* La méthode d'interpolation de M. Cauchy, que nous avons recommandée pour le calcul des coefficients des séries (1), sera exposée dans le Mémoire sur la détermination des éléments des orbites des planètes, qui fait partie de ces Additions.

## DEUXIEME MÉMOIRE

SUR LES

# ÉTOILES DOUBLES,

Par M. YVON VILLARCEAU.

Presenté à l'Académie des Sciences, le 30 juillet 1849.)

## *Méthode pour le calcul des orbites relatives dont le plan coïncide, ou à peu près, avec le rayon visuel.*

**1.** J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, dans sa séance du 26 mars dernier, une méthode pour calculer les orbites des étoiles doubles, fondée sur l'emploi des dérivées par rapport au temps, de l'angle de position et de la distance apparente; ces dérivées étant censées obtenues par voie d'interpolation. J'ai fait observer que les formules particulières à cette méthode tombent en défaut lorsque le plan de l'orbite coïncide, ou à peu près, avec le rayon visuel; il est même nécessaire, pour que l'on puisse en tirer un parti avantageux, que l'inclinaison ne soit pas très-considérable ou que l'orbite apparente ne soit pas très-allongée.

L'objet de la présente communication est d'établir le système de formules, basé sur l'emploi des coordonnées rectilignes et de leurs dérivées, qu'il convient d'employer lorsque la première méthode cesse d'être applicable. Le résultat auquel nous parviendrons conviendrait encore au cas d'une inclinaison quelconque; mais, comme il exige l'emploi des distances apparentes, on conçoit qu'il peut valoir mieux, dans certains cas, s'en tenir à la première méthode.

**2.** Soient, comme dans le précédent Mémoire,

$x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires de l'étoile satellite rapportées à des axes passant par l'étoile centrale: les axes des $x$ et des $y$ étant dans le plan perpendiculaire au rayon visuel, et l'axe des $z$ sur le prolongement de celui-ci;

$r$ la distance des deux étoiles;

$\alpha$ l'angle de position du satellite, corrigé de l'effet de la précession;

$\rho$ sa distance apparente à l'étoile centrale;

$\alpha_0$ l'angle de position de l'axe des $x$.

Pour la facilité des calculs numériques, on pourra donner à cet axe une direction à peu près parallèle à la direction de l'allongement de l'orbite apparente; l'angle de position de l'axe des $y$ sera $90^\circ + \alpha_0$.

Les équations différentielles du mouvement relatif du satellite sont :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \mu\dfrac{x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \mu\dfrac{y}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \mu\dfrac{z}{r^3} = 0. \end{cases}$$

L'usage que nous voulons faire de ces équations (*) exige que l'on ait calculé préalablement les coordonnées par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos(\alpha - \alpha_0), \\ y = \rho\sin(\alpha - \alpha_0), \end{cases}$$

et qu'ensuite, au moyen d'un procédé d'interpolation, celui de M. Cauchy par exemple, appliqué aux valeurs précédentes de $x$ et de $y$, on ait déterminé les coefficients des développements des valeurs générales de ces quantités, ordonnés suivant les puissances du temps. La forme de ces développements est

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + \ldots, \\ y = a' + b't + c't^2 + d't^3 + e't^4 + \ldots. \end{cases}$$

Les valeurs des coordonnées $x$ et $y$ et de leurs dérivées des divers ordres

---

(*) Les deux premières équations (1) fournissent le moyen d'établir, entre les données, deux équations de condition qu'il est aisé de vérifier, à peu près, à l'aide d'un tracé.

Ayant calculé les coordonnées $x$ et $y$ par les équations (2), on pourra construire deux courbes, dont le temps $t$ représentera les abscisses, tandis que $x$ et $y$ représenteront les ordonnées. Au point où ces courbes rencontreront l'axe des abscisses, on aura

$$x = 0, \quad y = 0;$$

mais, dans ce cas, les équations (1) donnent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Il s'ensuit que les courbes dont il s'agit, devront présenter des points d'inflexion là où elles couperont l'axe des abscisses. S'il n'en est point ainsi, on sera porté à taxer d'inexactitude une ou plusieurs observations.

à laquelle se rapportent les calculs, l'une de celles où les étoiles coïncident en apparence.

4. La première équation (1) permet d'éliminer immédiatement $\frac{\mu}{r^3}$, des équations (5), (6) et (9); elle donne, à cet effet,

$$\frac{\mu}{r^3} = -\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{10}$$

Il faut noter que $r$ et $\mu$ étant nécessairement positifs, les données doivent satisfaire à la condition

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2} < 0, \tag{11}$$

c'est-à-dire que $x$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ doivent être de signes contraires.

Substituons la valeur (10) dans les équations (5), (6) et (9), il viendra

$$\begin{cases} \dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{3}{r^2}\dfrac{rdr}{dt}\right) = 0, \\ \dfrac{d^4x}{dt^4} - \dfrac{d^2x}{dt^2}\left[\dfrac{1}{x}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{6}{r^2}\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{rdr}{dt} + \dfrac{15}{r^4}\left(\dfrac{rdr}{dt}\right)^2 - \dfrac{3}{r^2}\dfrac{d.\dfrac{rdr}{dt}}{dt}\right] = 0, \end{cases} \tag{11 bis}$$

$$\frac{d.\dfrac{rdr}{dt}}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} + \frac{r^2}{x}\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{12}$$

Pour simplifier, soient

$$\begin{cases} \mathrm{H} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\dfrac{dx}{dt}}{x} - \dfrac{\dfrac{d^3x}{dt^3}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}\right), \\ \mathrm{H}' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{x} - \dfrac{\dfrac{d^4x}{dt^4}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}\right). \end{cases} \tag{13}$$

Les quantités H et H′ seront des nombres connus et non susceptibles de devenir indéterminés, puisque nous supposons $x$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ essentiellement différents de zéro.

Au moyen de ces valeurs, on transforme aisément les équations (11 *bis*) mme il suit:

3 *bis*)
$$\begin{cases} \dfrac{rdr}{dt} - \mathrm{H}r^2 = 0, \\ \dfrac{2}{x}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{rdr}{dt} - \dfrac{5}{r^2}\left(\dfrac{rdr}{dt}\right)^2 + \dfrac{d.\dfrac{rdr}{dt}}{dt} - \mathrm{H}'r^2 = 0. \end{cases}$$

a première de celles-ci donne

4)
$$\frac{rdr}{dt} = \mathrm{H}r^2;$$

n substituant cette valeur et l'expression (12) dans la deuxième équa-ion (13 *bis*), il viendra

15)
$$\frac{2}{x}\frac{dx}{dt}\mathrm{H}r^2 - 5\mathrm{H}^2r^2 + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} + \frac{r^2}{x}\frac{d^2x}{dt^2} - \mathrm{H}'r^2 = 0.$$

On a d'ailleurs, par les équations (8) et (14),

16)
$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = \mathrm{H}r^2.$$

Nous devons éliminer des équations (15) et (16), la quantité $r^2$, au moyen de l'équation (7). Dans ce but, posons

17)
$$\mathrm{P}x^2 = \mathrm{H}(x^2 + y^2) - \left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right);$$

l'équation (16) donnera

18)
$$z\frac{dz}{dt} = \mathrm{P}x^2 + \mathrm{H}z^2.$$

Quant à l'équation (15), nous poserons en outre

19)
$$\mathrm{Q}^2 = \mathrm{H}' + 5\mathrm{H}^2 - 2\frac{\mathrm{H}}{x}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Cette nouvelle auxiliaire peut encore, au moyen de la valeur (13) de H', s'écrire ainsi:

$$\mathrm{Q}^2 = 5\mathrm{H}^2 - 2\frac{\mathrm{H}}{x}\frac{dx}{dt} - \frac{2}{3}\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{x} - \frac{1}{3}\frac{\dfrac{d^4x}{dt^4}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}.$$

L'expression (19) de $Q^2$ réduit d'abord l'équation (15) à

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}=Q^2r^2. \tag{20}$$

Cette relation montre que la valeur de $Q^2$ est essentiellement positive. Nous mettrons maintenant l'équation (20) sous la forme

$$Q^2(x^2+y^2)-\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}\right)+Q^2z^2-\frac{dz^2}{dt^2}=0. \tag{20 bis}$$

Il ne reste plus qu'à éliminer $\frac{dz}{dt}$ entre cette dernière et l'équation (18), de laquelle on tire

$$\frac{dz}{dt}=\frac{Px^2}{z}+Hz, \tag{21}$$

$$\frac{dz^2}{dt^2}=\frac{P^2x^4}{z^2}+2HPx^2+H^2z^2.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (20 *bis*), et divisons ensuite par $x^2$, il viendra

$$\frac{1}{x^2}\left[Q^2(x^2+y^2)-\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}\right)-2HPx^2\right]+(Q^2-H^2)\frac{z^2}{x^2}-P^2\frac{x^2}{z^2}=0. \tag{22}$$

3. Telle est l'équation qui fera connaître $z$. Avant de la résoudre, nous allons lui donner une autre forme, et démontrer d'abord que la quantité $Q^2-H^2$ est nécessairement positive. Soient $\frac{ds}{dt}$ la vitesse dans l'orbite réelle, et $\frac{dv}{dt}$ la vitesse angulaire ; l'équation (20) donne

$$Q^2r^2=\frac{ds^2}{dt^2}=r^2\frac{dv^2}{dt^2}+\frac{dr^2}{dt^2}; \tag{23}$$

mais, de l'équation (14), on tire

$$H^2r^2=\frac{dr^2}{dt^2};$$

soustrayant membre à membre, et divisant par $r^2$, il vient

$$Q^2-H^2=\frac{dv^2}{dt^2}, \tag{24}$$

quantité essentiellement positive.

Soient donc

$$(25)\qquad \begin{cases} K = \sqrt{Q^2 - H^2}, \\ k = \dfrac{1}{2K^2x^2}\left[Q^2(x^2+y^2) - \left(\dfrac{dx^2}{dt^2} + \dfrac{dy^2}{dt^2}\right) - 2HPx^2\right], \\ k' = \dfrac{P}{K}; \end{cases}$$

l'équation (22) donnera

$$2k + \frac{z^2}{x^2} - k'^2\frac{x^2}{z^2} = 0,$$

ou bien

$$(26)\qquad \left(\frac{z}{x}\right)^4 + 2k\left(\frac{z}{x}\right)^2 - k'^2 = 0.$$

Cette équation, considérée comme étant du deuxième degré, a ses racines réelles et de signes contraires; or, le rapport $\left(\frac{z}{x}\right)^2$ étant nécessairement positif, nous n'avons à considérer que la racine positive dont la valeur est

$$(26\,bis)\qquad \left(\frac{z}{x}\right)^2 = \sqrt{k^2 + k'^2} - k.$$

Si l'on veut calculer cette expression par la trigonométrie, on fera usage d'un angle auxiliaire $\varphi$, en posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{k'}{k};$$

le radical deviendra alors

$$\pm k\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{k}{\cos\varphi},$$

et comme cette quantité doit être positive, il faudra prendre $\varphi$ de manier que $\cos\varphi$ et $k$ soient de même signe, ou $\sin\varphi$ de même signe que $k'$; il viendra ainsi

$$\left(\frac{z}{x}\right)^2 = \frac{k}{\cos\varphi}(1 - \cos\varphi) = \frac{k'}{\sin\varphi}(1 - \cos\varphi),$$

d'où

$$\left(\frac{z}{x}\right)^2 = k' \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.$$

La valeur de $z$ en fonction de $x$ se déduira de cette équation ou de (26 *bis*),

et prendra le signe $\pm$. Cela doit être, puisqu'il n'est pas possible de distinguer si le satellite est en deçà ou au delà de l'étoile centrale.

La valeur de $\frac{dz}{dt}$ est donnée par l'équation (21); mais le terme $\frac{Px^2}{z}$ qu'elle renferme, peut donner lieu à une indétermination, attendu que $Px^2$ et $z$ sont tels, que l'une de ces quantités ne peut devenir très-petite, sans que l'autre le devienne en même temps. En effet, substituons la valeur de $k'^2$ dans l'équation (26), et multiplions par $K^2x^4$, il viendra

$$K^2z^4 + 2kK^2x^2z^2 - P^2x^4 = 0.$$

Cette expression montre que $Px^2$ et $z$ s'annulent ensemble; elle donne, d'ailleurs,

$$(27) \qquad \frac{Px^2}{z} = \pm Kx\sqrt{2k + \left(\frac{z}{x}\right)^2} = \pm Kx\sqrt{\frac{2k}{\cos\varphi}}\cos\frac{1}{2}\varphi.$$

Si donc le rapport $\frac{Px^2}{z}$ se montre mal déterminé, on devra employer l'une ou l'autre des expressions (27), en leur donnant le signe qui résulte de celui de $Px^2$, et du signe que l'on aura admis pour $z$.

D'ailleurs, ayant calculé $r$ par l'équation (7), on pourra vérifier les calculs au moyen de l'équation (20) qui donne

$$(28) \qquad \frac{dz^2}{dt^2} = Q^2r^2 - \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right).$$

On calculera ensuite $\frac{rdr}{dt}$, soit par l'équation (8), soit par l'équation (14), puis la valeur de $\mu$, par l'équation (10).

**6. Connaissant les trois coordonnées et leurs dérivées du premier ordre, ainsi que la constante $\mu$, le calcul des éléments n'offre plus de difficultés.** Je me dispenserais de prolonger l'exposé des formules, si l'emploi de certaines fonctions déjà employées ne simplifiait les calculs qui restent à effectuer. Ces fonctions présentent, en outre, des moyens de vérifications numériques.

La valeur connue de l'inverse du demi-grand axe est

$$(28\ bis) \qquad \frac{1}{A} = \frac{2}{r} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right);$$

elle devient, en vertu des équations (10) et (20),

$$\frac{r}{A} = 2 + \frac{x}{\frac{d^2x}{dt^2}} Q^2. \tag{29}$$

$\frac{r}{A}$ étant positif dans l'ellipse, nul dans la parabole et négatif dans l'hyperbole, le signe du second membre de l'équation (29) indique à laquelle de ces courbes appartient l'orbite, sans qu'il soit nécessaire de poursuivre les calculs au delà de la valeur de $Q^2$.

Nous avons maintenant, pour expressions des constantes des aires, les formules

$$\begin{cases} G = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}, \\ G' = z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}, \\ G'' = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}; \end{cases} \tag{30}$$

puis, les suivantes, pour calculer la longitude du nœud $\Omega$ et l'inclinaison I,

$$\operatorname{tang}(\Omega - \alpha_0) = -\frac{G}{G'}, \tag{31}$$

$$\operatorname{tang} I = \frac{\sqrt{G^2 + G'^2}}{G''} = \frac{1}{\sin(\Omega - \alpha_0)}\frac{G}{G''} = -\frac{1}{\cos(\Omega - \alpha_0)}\frac{G'}{G''}. \tag{32}$$

La première de ces formules exige que $\sin(\Omega - \alpha_0)$ ait le signe de G; la seconde suppose I compris entre 0 degré et 180 degrés.

L'expression du demi-paramètre est

$$\begin{cases} \Pi = \frac{1}{\mu}(G^2 + G'^2 + G''^2) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{G}{\sin(\Omega - \alpha_0)\sin I}\right]^2 \\ \quad = \frac{1}{\mu}\left[\frac{G'}{\cos(\Omega - \alpha_0)\sin I}\right]^2. \end{cases} \tag{33}$$

L'équation connue des aires dans l'orbite, va nous fournir une autre expression de $\Pi$, qui pourra servir à la vérification des calculs numériques; cette équation est

$$r^2\frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu\Pi};$$

or, on a, par les équations (24) et (25),

$$\frac{dv^2}{dt^2} = K^2;$$

il s'ensuit

$$K^2 r^4 = \mu \Pi, \tag{34}$$

ou

$$\Pi = \frac{K^2 r^4}{\mu},$$

puis

$$\frac{\Pi}{r} = \frac{K^2 r^3}{\mu} = -\frac{x}{\frac{d^2x}{dt^2}} K^2. \tag{35}$$

On a aussi, entre l'excentricité E, l'anomalie vraie V et la dérivée $\frac{dr}{dt}$, la relation

$$E \sin V = \sqrt{\frac{\Pi}{\mu}} \frac{dr}{dt},$$

qui donne, à cause de l'équation (14),

$$E \sin V = \sqrt{\frac{\Pi}{\mu}} Hr = \sqrt{\frac{\Pi}{r} \frac{r^3}{\mu}} H.$$

En substituant ici la valeur de $\frac{r^3}{\mu}$ tirée de l'équation (35), il vient

$$E \sin V = \frac{\Pi}{r} \frac{H}{K}; \tag{36}$$

on a d'ailleurs, par l'équation polaire de l'orbite,

$$E \cos V = \frac{\Pi}{r} - 1. \tag{37}$$

Ces deux dernières équations donnent, par division, la tangente de l'angle V qui se trouve déterminé sans ambiguïté; E se déduit ensuite de l'une ou de l'autre, et sa valeur doit satisfaire à la relation

$$\Pi = A(1 - E^2). \tag{38}$$

La vérification analytique est facile à faire. En effet, élevons au carré, et ajoutons membre à membre les équations (36) et (37), il viendra

$$E^2 = \frac{\Pi^2}{r^2} \frac{H^2}{K^2} + \frac{\Pi^2}{r^2} - 2\frac{\Pi}{r} + 1;$$

on en tire

$$1 - E^2 = -\frac{\Pi}{r}\left[\frac{\Pi}{r} \frac{H^2 + K^2}{K^2} - 2\right],$$

ou, à cause de la première équation (25) et de l'équation (35),

$$1 - E^2 = \frac{\Pi}{r}\left(2 + \frac{x}{\frac{d^2x}{dt^2}}Q^2\right);$$

mais la valeur de la parenthèse est $\frac{r}{A}$, d'après l'équation (29), il vient donc

$$1 - E^2 = \frac{\Pi}{A},$$

équation qui coïncide avec l'équation (38).

Le moyen mouvement N se tire de la formule connue

$$A^3 N^2 = \mu,$$

qui donne

$$N^2 = \frac{\mu}{r^3}\frac{r^3}{A^3},$$

et, en vertu de l'équation (10),

$$N = \sqrt{-\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}}\left(\frac{r}{A}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{39}$$

Les formules propres au calcul des deux éléments qui restent encore à déterminer, ne présentent rien qui ne soit connu ; nous ne nous y arrêterons donc point : elles seront d'ailleurs rapportées dans le résumé qui terminera ce Mémoire.

7. Je pense qu'il ne sera pas inutile de montrer que les formules auxquelles nous sommes parvenus, ne tombent point en défaut, lorsque la valeur de $\frac{dx}{dt}$ se trouve égale à zéro, celle de $x$ n'étant pas nulle. En effet, $\frac{d^2x}{dt^2}$ ne pouvant devenir nul dans le cas où $x$ ne l'est pas, il en résulte d'abord que H et H′ ne sont point indéterminés. On voit aisément que les auxiliaires P et $Q^2$ restent déterminées ; l'auxiliaire $K^2$, d'après sa signification, ne peut être nulle ; les coefficients $k$ et $k'$, et par suite les valeurs de $\left(\frac{z}{x}\right)^2$ et $\frac{dz}{dt}$ restent pareillement déterminés.

Il est bon encore d'examiner ce que deviennent ces formules, lorsque, tout en conservant l'hypothèse actuelle, on suppose en outre $\frac{rdr}{dt} = 0$. Cette nouvelle hypothèse répond au cas où le satellite se trouverait à l'une des extrémités du grand axe, ou bien décrirait une orbite circulaire. L'équation (14) montre qu'alors on aurait $H = 0$ ; il faudrait donc, d'après l'équation (13), que l'on eût d'abord $\frac{d^3x}{dt^3} = 0$.

Pour plus de simplicité, nous considérerons seulement le cas extrême où l'orbite coïncide avec le rayon visuel, ce qui entraîne les relations $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$.

L'équation (17) donne $P = H$ ou $P = 0$. Il résulte de la deuxième équation (13 *bis*), que H′ s'annule dans le cas d'une orbite circulaire, mais ne s'annule pas si le satellite est simplement à l'une des extrémités du grand axe, dans une orbite excentrique, attendu que $d.\frac{\frac{rdr}{dt}}{dt}$ n'est pas nul dans cette circonstance. Quoi qu'il en soit, on a, par l'équation (19),

$$Q^2 = H' - \frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2},$$

et, par les équations (25),

$$K^2 = Q^2, \quad k = \frac{1}{2}, \quad k' = 0.$$

L'équation (26) se réduit alors à

$$\left(\frac{z}{x}\right)^2\left[\left(\frac{z}{x}\right)^2 + 1\right] = 0,$$

équation dont la seule racine réelle est $\frac{z}{x} = 0$. Ce résultat n'est point indéterminé, et pouvait être prévu.

Quant à la valeur de $\frac{dz}{dt}$, l'équation (28) donne simplement

$$\frac{dz}{dt} = \pm Qr.$$

## *Relations entre les dérivées différentielles des coordonnées x et y.*

8. J'ai dit que la méthode actuelle s'appliquerait encore au cas d'une orbite dont l'inclinaison serait quelconque.

Dans le cas général, il existe entre les dérivées contenues dans les développements de $x$ et de $y$, des équations de condition qu'il est bon de faire connaître.

Formons la valeur de G″, équation (30), au moyen des valeurs de $x$ et $y$, ainsi que de leurs dérivées tirées des équations (3); il vient

$$x = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 + \ldots,$$

$$\frac{dy}{dt} = b' + 2c't + 3d't^2 + 4e't^3 + 5f't^4 + 6g't^5 + \ldots;$$

puis, en multipliant,

$$\frac{xdy}{dt} = ab' + \begin{array}{l|l|l|l|l|l} 2ac' & t + 3ad' & t^2 + 4ae' & t^3 + 5af' & t^4 + 6ag' & t^5 + \dots \\ + \ bb' & + 2bc' & + 3bd' & + 4be' & + 5bf' & \\ & + \ cb' & + 2cc' & + 3cd' & + 4ce' & \\ & & + \ db' & + 2dc' & + 3dd' & \\ & & & + \ eb' & + 2ec' & \\ & & & & + \ fb' & \end{array}$$

On obtiendra, par une simple transposition d'accents,

$$\frac{ydx}{dt} = a'b + \begin{array}{l|l|l|l|l|l} 2a'c & t + 3a'd & t^2 + 4a'e & t^3 + 5a'f & t^4 + 6a'g & t^5 + \dots \\ + \ b'b & + 2b'c & + 3b'd & + 4b'e & + 5b'f & \\ & + \ c'b & + 2c'c & + 3c'd & + 4c'e & \\ & & + \ d'b & + 2d'c & + 3d'd & \\ & & & + \ e'b & + 2e'c & \\ & & & & + \ f'b & \end{array}$$

La substitution de ces valeurs dans la troisième équation (30), donne une expression de la constante G″ ordonnée suivant les puissances du temps. Cette expression devant rester la même quel que soit $t$, il en résulte que G″ est égal à la partie indépendante de $t$, et que les coefficients des différentes puissances de cette variable doivent être nuls séparément. On a donc

$$G'' = ab' - a'b,$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2(ac' - a'c), \\ 0 = 3(ad' - a'd) + (bc' - b'c), \\ 0 = 4(ae' - a'e) + 2(bd' - b'd), \\ 0 = 5(af' - a'f) + 3(be' - b'e) + (cd' - c'd), \\ 0 = 6(ag' - a'g) + 4(bf' - b'f) + 2(ce' - c'e), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Dans ces équations, la loi des coefficients numériques est très-simple ; ils croissent d'une unité dans le sens vertical, et décroissent de deux unités dans le sens horizontal.

Les équations (40) sont des équations de condition entre les coefficients des développements de $x$ et de $y$, et, par suite, entre les dérivées de ces quantités qu'ils représentent, non-seulement à l'époque $t = 0$, mais encore à toute autre époque, puisque l'origine du temps est quelconque.

Les seuls coefficients de même ordre qui soient indépendants dans les deux séries, sont $a$, $a'$, $b$ et $b'$ ; les autres sont liés entre eux par les équations (40).

Si, par exemple, les observations ont fait connaître les valeurs de $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, ..., puis, de $a'$ et $b'$, ces équations serviront, au besoin, pour calculer successivement $c'$, $d'$, $e'$, $f'$, $g'$, ....

Dans le cas où les coefficients $a$, $b$, $c$, $d$, ... seront exprimés en fonctions d'une ou plusieurs indéterminées, et ceux de l'autre série, en fonctions d'une ou plusieurs autres indéterminées, il faudra substituer les valeurs indéterminées de $a$, $b$, $c$, ..., $a'$, $b'$, $c'$, ... dans les équations (40). Leur résolution fera connaître les valeurs des indéterminées, si leur nombre est égal à celui des équations. Si le nombre des indéterminées est plus grand, le problème restera indéterminé; s'il est plus petit, on aura une ou plusieurs équations de condition entre les données.

## *Résumé des formules à employer dans la détermination des éléments des orbites relatives des étoiles doubles, lorsque le plan de l'orbite coïncide, ou à peu près, avec le rayon visuel.*

**9.** Les formules qui suivent sont de simples transformations de celles précédemment obtenues; ces transformations résultent de l'emploi des équations (4), et de la substitution, pour plus de symétrie, de $a''$ et $b''$ à $z$ et $\frac{dz}{dt}$.

Supposons que l'on ait pris pour axe des $x$ une droite à peu près parallèle à la direction de l'allongement de l'orbite apparente : $\alpha_0$ étant l'angle de position de l'axe des $x$, et $90^\circ + \alpha_0$ celui de l'axe des $y$; on fera d'abord, pour chaque observation,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \rho \cos(\alpha - \alpha_0), \\ y = \rho \sin(\alpha - \alpha_0). \end{cases}$$

On se servira de ces valeurs pour calculer, au moyen d'une méthode convenable d'interpolation, les coefficients des deux séries

$$(11)\qquad \begin{cases} x = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 + \ldots, \\ y = a' + b't + c't^2 + \ldots, \end{cases}$$

en choisissant pour origine du temps $t$, une époque à laquelle $x$ ne soit pas nul, attendu que les formules suivantes se rapportent essentiellement à l'origine du temps.

Ces coefficients exprimés, s'il y a lieu, en fonctions d'indéterminées, devront satisfaire aux équations (40), et en outre à la condition

$$(111)\qquad \frac{c}{a} < 0.$$

On calculera ensuite

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} H = \frac{1}{3}\frac{b}{a} - \frac{d}{c}, \\ Pa^2 = H(a^2 + a'^2) - (ab + a'b'), \\ K = \sqrt{4\left(H^2 - \frac{1}{3}\frac{c}{a} - \frac{e}{c}\right) - 2\frac{b}{a}H} \end{cases}$$

$$\text{(V)}\qquad \text{condition}\quad K^2 > 0,$$

$$\text{(VI)}\qquad Q^2 = H^2 + K^2.$$

Il est aisé de reconnaître immédiatement si l'orbite est elliptique ; la condition, pour qu'il en soit ainsi, est

$$\text{(VII)}\qquad 2 + \frac{1}{2}\frac{a}{c}Q^2 > 0.$$

Si l'une ou l'autre des conditions (III) et (V) n'est pas remplie, il sera inutile de poursuivre les calculs. De même, si l'orbite doit être elliptique, et que l'inégalité (VII) n'ait pas lieu, on devra s'arrêter. Dans le cas contraire, on aura

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{cases} k = \frac{1}{2K^2a^2}[Q^2(a^2 + a'^2) - (b^2 + b'^2) - 2HPa^2], \\ k' = \frac{P}{K}. \end{cases}$$

La valeur de $a''$, qui pourra recevoir arbitrairement le signe + ou le signe —, se tirera de l'équation

$$\text{(IX)}\qquad \left(\frac{a''}{a}\right)^2 = \sqrt{k^2 + k'^2} - k;$$

on aura, si on le préfère, par la trigonométrie,

$$\tang\varphi = \frac{k'}{k}$$

(prendre $\varphi$ de sorte que $\sin\varphi$ ait le même signe que $k'$);

$$\left(\frac{a''}{a}\right)^2 = k' \tang\frac{1}{2}\varphi.$$

Il viendra ensuite

$$\text{(X)}\qquad b'' = \frac{Pa^2}{a''} + Ha''.$$

La valeur de $\frac{Pa^2}{a''}$ pourra se trouver mal déterminée ; il faudra alors calculer cette quantité par la formule

$$(\text{XI}) \qquad \frac{Pa^2}{a''} = \pm Ka\sqrt{2k + \left(\frac{a''}{a}\right)^2} = \pm Ka\sqrt{\frac{2k}{\cos\varphi}}\cos\frac{1}{2}\varphi,$$

en prenant pour signe, celui qui résulte des signes de $Pa^2$ et de $a''$. D'ailleurs, en calculant $r$ par l'équation

$$(\text{XII}) \qquad r^2 = a^2 + a'^2 + a''^2,$$

on pourrait tirer $b''$ de l'une des suivantes qui seront utiles pour les vérifications

$$(\text{XIII}) \qquad \begin{cases} b^2 + b'^2 + b''^2 = Q^2 r^2, \\ ab + a'b' + a''b'' = Hr^2. \end{cases}$$

Ici commence, à proprement parler, le calcul des éléments :

$$(\text{XIV}) \qquad \begin{cases} \frac{\mu}{r^3} = -2\frac{c}{a}, \\ \frac{r}{A} = 2 + \frac{1}{2}\frac{a}{c}Q^2; \end{cases}$$

$$(\text{XV}) \qquad \begin{cases} G = a'b'' - a''b', \\ G' = a''b - ab'', \\ G'' = ab' - a'b; \end{cases}$$

$$(\text{XVI}) \qquad \text{vérification} \quad Ga + G'a' + G''a'' = 0.$$

$$(\text{XVII}) \qquad \operatorname{tang}(\Omega - \alpha_0) = -\frac{G}{G'};$$

$\sin(\Omega - \alpha_0)$ doit avoir le signe de G.

$$(\text{XVIII}) \qquad \operatorname{tang} I = \frac{\sqrt{G^2 + G'^2}}{G''} = \frac{1}{\sin(\Omega - \alpha_0)}\frac{G}{G''} = -\frac{1}{\cos(\Omega - \alpha_0)}\frac{G'}{G''};$$

I doit être pris entre o degré et 180 degrés.

$$(\text{XIX}) \qquad \begin{cases} \Pi\mu = G^2 + G'^2 + G''^2 = \left[\frac{G}{\sin(\Omega - \alpha_0)\sin I}\right]^2 \\ \qquad = \left[\frac{G'}{\cos(\Omega - \alpha_0)\sin I}\right]^2 = K^2 r^4; \end{cases}$$

d'où $\Pi$, et ensuite $\frac{\Pi}{r}$.

$$(\text{xx}) \qquad \begin{cases} \mathrm{E}\sin\mathrm{V} = \dfrac{\Pi}{r}\dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}, \\ \mathrm{E}\cos\mathrm{V} = \dfrac{\Pi}{r} - 1; \end{cases}$$

on en tire V sans ambiguïté, puis E.

La valeur de E pourra d'ailleurs être tirée des équations suivantes, qui conviendront particulièrement au cas des orbites réelles très-excentriques,

$$(\text{xxi}) \qquad \begin{cases} \cos^2\eta = \dfrac{\Pi}{r}\dfrac{r}{\mathrm{A}}, \\ \mathrm{E} = \sin\eta. \end{cases}$$

Dans les orbites peu excentriques, E sera mieux déterminé par les équations (xx), bien qu'alors V ne puisse l'être aussi exactement; et l'on obtiendra une vérification, en calculant $\dfrac{r}{\mathrm{A}}$ par la formule

$$(\text{xxi } bis) \qquad \frac{r}{\mathrm{A}} = \frac{1-\mathrm{E}^2}{\dfrac{\Pi}{r}}.$$

Le moyen mouvement N exprimé en nombres abstraits est

$$(\text{xxii}) \qquad \mathrm{N} = \sqrt{-\frac{2c}{a}}\left(\frac{r}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{3}{2}};$$

d'où, durée de la révolution,

$$(\text{xxiii}) \qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\mathrm{N}}.$$

L'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne, ou l'époque $\tau$ du passage au périhélie, se calculent par les formules connues

$$(\text{xxiv}) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}u = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{V}}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)}, \\ \mathrm{N}t + \varepsilon - \varpi \quad \text{ou} \quad \mathrm{N}(t-\tau) = u - \mathrm{E}\sin u \quad [*]; \end{cases}$$

on a, pour vérification,

$$(\text{xxv}) \qquad \frac{\Pi}{r}\sin u - \cos\eta\sin\mathrm{V} = 0.$$

---

[*] L'usage de cette formule exige qu'on ne perde pas de vue l'époque à laquelle se rapporte $u$; c'est celle qu'on a choisie pour origine du temps.

L'angle de position $\alpha$ se calcule par la formule

$$\text{(XXVI)} \qquad \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0) = \frac{a'}{a},$$

en prenant $(\alpha - \alpha_0)$ de manière que son sinus ait le signe de $a'$; on a ensuite, pour déterminer l'angle $\lambda$ du rayon vecteur et de sa projection,

$$\text{(XXVII)} \qquad \operatorname{tang}\lambda = \frac{a''}{\sqrt{a^2 + a'^2}},$$

et $\lambda$ doit être pris entre $+ 90$ degrés et $- 90$ degrés.

I étant supposé peu différent de 90 degrés, la distance au nœud se tire de la formule

$$\text{(XXVIII)} \qquad \operatorname{tang}(\nu - \Omega) = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\cos(\alpha - \Omega)\sin I},$$

en prenant $(\nu - \Omega)$ de manière que son cosinus ait le signe de $\cos(\alpha - \Omega$; on peut ensuite, pour vérification, appliquer les formules

$$\text{(XXIX)} \qquad \begin{cases} \cos(\nu - \Omega) = \cos(\alpha - \Omega)\cos\lambda, \\ \sin\lambda = \sin(\nu - \Omega)\sin I. \end{cases}$$

La distance du périhélie au nœud est

$$\text{(XXX)} \qquad \varpi - \Omega = \nu - \Omega - V.$$

Enfin, le rapport de la somme des masses $m' + m''$ des deux étoiles, à la somme $M + m$ des masses du Soleil et de la Terre, est, comme dans le précédent Mémoire,

$$\text{(XXXI)} \qquad \frac{m' + m''}{M + m} = \left(\frac{A}{\varpi'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2,$$

$T'$ désignant la durée de l'année sidérale, et $\varpi'$ la parallaxe de l'étoile.

Lorsqu'on procédera à la comparaison des éléments avec les observations, on pourra calculer la distance angulaire du rayon vecteur projeté au nœud, par la formule ordinaire

$$\operatorname{tang}(\alpha - \Omega) = \operatorname{tang}(\nu - \Omega)\cos I;$$

mais, l'inclinaison étant supposée très-forte, il faudra calculer l'angle $\lambda$ par l'une ou l'autre des formules

$$\cos\lambda = \frac{\cos(\nu - \Omega)}{\cos(\alpha - \Omega)} = \frac{\sin(\nu - \Omega)}{\sin(\alpha - \Omega)}\cos I;$$

la première devant servir lorsque $(\nu - \Omega)$ différera beaucoup de 90 degrés ou 270 degrés, et la seconde lorsque $(\nu - \Omega)$ se rapprochera de ces valeurs.

*Addition relative au cas où l'on aurait $x = 0$ ou très-petit, à l'instant auquel se rapportent les calculs.*

**10.** Nous avons vu, au n° 3, que si l'on a $x = 0$, la première équation (1) se réduit à une équation de condition entre les données. Il en résulte la nécessité de se procurer une nouvelle équation par la différentiation. A cet effet, et pour plus de simplicité, multiplions d'abord l'équation (6) par $\frac{r^5}{\mu}$, elle donnera

$$(41)\qquad \frac{r^5}{\mu}\frac{d^4x}{dt^4} + r^2\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt}\frac{rdr}{dt} + 15\frac{x}{r^2}\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - 3x\frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt} = 0.$$

En différentiant, il vient

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{r^5}{\mu}\frac{d^5x}{dt^5} + 5\frac{r^3}{\mu}\frac{d^4x}{dt^4}\frac{rdr}{dt} + r^2\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2}\frac{rdr}{dt} - 6\frac{dx}{dt}\frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt} \\ \qquad + \frac{15}{r^2}\frac{dx}{dt}\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - 6\frac{d^2x}{dt^2}\frac{rdr}{dt} - 3\frac{dx}{dt}\frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt} \\ \qquad - 30\frac{x}{r^4}\left(\frac{rdr}{dt}\right)^3 + 30\frac{x}{r^2}\frac{rdr}{dt}\frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt} - 3x\frac{d^2\frac{rdr}{dt}}{dt^2} = 0. \end{array}\right.$$

Cette équation contient une nouvelle dérivée dont il s'agit de former l'expression. Nous avons trouvé

$$(43)\qquad \frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r};$$

il vient, par la différentiation,

$$\frac{d^2\frac{rdr}{dt}}{dt^2} = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{\mu}{r^3}\frac{rdr}{dt};$$

mais on a, par les équations (1),

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) = -\frac{\mu}{r^3}\frac{rdr}{dt},$$

il vient donc simplement

$$\frac{d^2\frac{rdr}{dt}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\frac{rdr}{dt}. \tag{44}$$

C'est d'ailleurs ce qu'on obtiendrait immédiatement en substituant d'abord à $\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}$, dans l'équation (43), sa valeur $\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{A}\right)$ (28 *bis*); on aurait ainsi

$$\frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt} = \mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{A}\right), \tag{45}$$

et cette équation étant différentiée, donnerait l'équation (44).

Revenons à l'équation (42); elle contient deux termes qui se réduisent à

$$-4\frac{d^2x}{dt^2}\frac{rdr}{dt};$$

d'un autre côté, le dernier terme est

$$-3x\frac{d^2\frac{rdr}{dt}}{dt^2} = +3x\frac{\mu}{r^3}\frac{rdr}{dt},$$

en vertu de l'équation (44); sa valeur est encore

$$-3\frac{d^2x}{dt^2}\frac{rdr}{dt},$$

et cette forme le rend finalement réductible avec la somme précédente. L'équation (42) se réduit elle-même, au moyen de ces valeurs, à

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{r^5}{\mu}\frac{d^5x}{dt^5}+5\frac{r^3}{\mu}\frac{d^4x}{dt^4}\frac{rdr}{dt}+r^2\frac{d^3x}{dt^3}-7\frac{d^2x}{dt^2}\frac{rdr}{dt}-9\frac{dx}{dt}\frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt} \\ +\frac{15}{r^2}\frac{dx}{dt}\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2-30\frac{x}{r^4}\left(\frac{rdr}{dt}\right)^3+30\frac{x}{r^2}\frac{rdr}{dt}\frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt}=0. \end{array}\right. \tag{46}$$

Telle est l'équation qu'il faut joindre aux équations (5) et (6): si l'on suppose les quantités $r$, $\frac{rdr}{dt}$ et $\frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt}$ remplacées dans ces trois équations, par

leurs valeurs tirées de (7), (8) et (9), on aura à résoudre trois équations ne renfermant plus que les inconnues $\mu$, $z$ et $\frac{dz}{dt}$.

La résolution de ces équations serait très-compliquée; nous ne la tenterons pas. Mais, si nous remarquons que l'hypothèse d'une orbite apparente très-allongée, jointe à la direction de l'axe des $x$ suivant cet allongement, entraîne pour conséquence la petitesse constante de $y$, et, par suite, de $\frac{dy}{dt}$, nous devons admettre, dans l'application actuelle de notre méthode, que ces quantités sont très-petites en même temps que $x$. Si l'orbite n'était pas très-allongée, on serait, à la rigueur, dispensé de recourir à la présente méthode, en appliquant celle que nous avons exposée dans le précédent Mémoire.

On aura donc une première valeur approchée de chacune des trois inconnues, en faisant

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \tag{47}$$

la dernière de ces équations résulte de la première, en vertu des équations (1).

Les corrections des valeurs approchées pourront s'obtenir en faisant usage de la méthode des équations linéaires, ou bien en substituant les valeurs approchées des racines, dans les termes affectés de facteurs qui s'annulent par suite des hypothèses précédentes, et ajoutant ces termes aux parties connues, puis résolvant de nouveau les équations.

En vertu des équations (47), les équations (7), (8) et (9) donnent

$$r^2 = z^2, \quad \frac{rdr}{dt} = \frac{zdz}{dt}, \quad \frac{d.\frac{rdr}{dt}}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r^3}z^2; \tag{48}$$

et il vient, par l'équation (5),

$$\frac{\mu}{r^3} = -\frac{\frac{d^3x}{dt^3}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{49}$$

L'équation (6) donne donc

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{6}{z^2}\frac{d^3x}{dt^3}\frac{zdz}{dt} = 0;$$

d'où

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{6}\frac{\frac{d^4x}{dt^4}}{\frac{d^3x}{dt^3}}z. \tag{50}$$

Enfin, en substituant ces valeurs dans l'équation (iii), il vient

$$-\frac{dx}{dt}\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}z - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\left(\frac{\frac{d^3x}{dt^3}}{\frac{d^2x}{dt^2}} - \frac{\frac{d^3x}{dt^3}}{\frac{d^2x}{dt^2}}\right)z^2 - \frac{d^3x}{dt^3}z^3$$

$$-\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\left[\frac{dx}{dt} - \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{d^3x}{dt^3}}{\frac{d^2x}{dt^2}} - \frac{\frac{d^3x}{dt^3}}{\frac{dx}{dt}}\right)z^2\right] - \frac{1}{3}\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{\frac{d^3x}{dt^3}}{\frac{d^2x}{dt^2}}\right)z^2 = 0;$$

on en tire

$$z = \frac{3\frac{dx}{dt}}{\left(\frac{\frac{d^3x}{dt^3}}{\frac{d^2x}{dt^2}} - \frac{\frac{d^3x}{dt^3}}{\frac{dx}{dt}}\right) - 3\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}}}. \qquad (51)$$

Cette équation donne la valeur de $z$ avec un signe arbitraire, et l'équation (50) permet de calculer celle de $\frac{dz}{dt}$, tandis que $x$ est donné par l'équation (49). Celle-ci montre que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ doivent être ici de signes contraires.

On peut donc, avec ces valeurs approchées, procéder à une nouvelle approximation, ainsi qu'il a été dit plus haut.

Le cas que nous venons d'examiner pouvant être aisément évité, je n'ai pas cru devoir entrer dans plus de détails sur les calculs qui s'y rapportent.

11. Les étoiles doubles dont le plan de l'orbite relative coïncide à peu près avec le rayon visuel, sont peu nombreuses. Les observations qu'on en possède ne paraissent pas permettre d'y appliquer utilement la méthode qui vient d'être exposée; mais il y a lieu d'espérer que d'ici à un petit nombre d'années, on en pourra faire l'application à l'étoile $\zeta_2$ de la Chevelure de Bérénice et à l'étoile australe $\alpha$ du Centaure.

*P. S.* Je me suis servi des formules présentées dans ce Mémoire, pour calculer les éléments de l'orbite de 70 $p$ d'Ophiuchus; et l'approximation que j'ai obtenue est très-satisfaisante, bien que la série des observations modernes laisse subsister deux indéterminées. Les valeurs de celles-ci ont été fixées par la condition de satisfaire à deux angles de position que j'ai déduits de quatre observations de W. Herschel faciles à combiner deux à deux.

# PREMIÈRE NOTE

SUR LES

# ÉTOILES DOUBLES,

Par M. YVON VILLARCEAU.

(Présentée à l'Académie des Sciences, le 12 février 1849.)

## ζ *d'Hercule.*

Depuis la découverte du mouvement de révolution dans les étoiles multiples, par William Herschel, d'immenses travaux d'observation ont été entrepris dans le but d'en compléter le dénombrement et de recueillir la suite des positions relatives des étoiles de chaque système. Ces recherches n'ont été poursuivies avec régularité que depuis 1818 environ; on doit les plus importants résultats obtenus, au zèle et à l'habileté de MM. Struve et sir John Herschel. Les nouvelles observations apportèrent de nouvelles confirmations aux vues de William Herschel, sur le mouvement de révolution des étoiles doubles; et dix années s'étaient à peine écoulées, qu'un membre de l'Académie des Sciences entreprit d'appliquer à ces astres la théorie du mouvement elliptique, et de montrer qu'une loi unique, la loi de la pesanteur, régit le mouvement des étoiles doubles et celui des planètes de notre système. Dans ce but, Savary, sur la sollicitation de M. Arago, fit l'application de ses formules à l'étoile ξ de la grande Ourse. Mais, telles sont les difficultés dont les plus légères erreurs des observations entourent le problème, que Savary n'osa présenter ses résultats que comme un exemple de calcul. Les éléments qu'il a donnés de l'orbite de cette étoile peuvent, dit-il, être fort loin de leurs valeurs véritables. D'ailleurs, il commence ses calculs en partant de données auxquelles il n'attribue *aucune réalité*, et termine en disant que ces données sont *à peu près* quatre observations de l'étoile double ξ de la grande Ourse, sauf deux rayons vecteurs déduits du mouvement angulaire. Disons, en passant, que la plus grande difficulté du travail de Savary a dû se présenter dans la détermination des données qu'il substitue aux observations. M. Encke a fait également l'application d'une méthode de son invention à l'étoile *p* d'Ophiuchus; et, depuis lors, divers astronomes se sont occupés, en Angleterre et en Allemagne, du calcul des orbites des étoiles doubles.

On conçoit que la précision des résultats dépend, non-seulement de l'exac-

titude des observations, mais aussi de l'amplitude du déplacement observé. Désirant produire des résultats utiles à la science, en appliquant les formules que j'ai eu l'honneur de déposer, et de nouvelles méthodes que j'exposerai plus tard, j'ai obtenu de la libéralité scientifique de MM. Struve, à laquelle je m'empresse de rendre hommage, la communication de plusieurs séries d'observations précieuses encore inédites, faisant suite au grand ouvrage de M. Struve et à l'*Additamenta*, et comprenant l'année 1847. Aujourd'hui, je viens présenter à l'Académie le premier extrait d'un long travail que j'ai entrepris sur les étoiles doubles; il est relatif au système binaire ζ d'Hercule (2084 Struve). La position moyenne de ce système est, en 1826,0,

$$\text{R} = 16^{h}34^{m},8,$$
$$\text{D} = +31^{\circ}55';$$

il se compose de deux étoiles, dont l'une de 3ᵉ grandeur est de couleur *subflava*, et l'autre de 6ᵉ à 7ᵉ est *subrubra* (Struve).

C'est l'étoile double qui excita à un si haut degré l'attention de William Herschel, lui présentant un phénomène entièrement nouveau en astronomie, celui de l'occultation d'une étoile fixe par une autre. William Herschel la vit double en 1782 et mesura l'angle de position. En 1795, il trouva qu'il était difficile d'apercevoir la petite étoile; cependant, en octobre de la même année, avec un grossissement de 460 fois, il la vit franchement double, et indiqua le quadrant dans lequel elle était située. Herschel ne reprit ensuite les observations de ζ d'Hercule qu'en 1802 et 1803 : tantôt il croyait apercevoir la petite étoile, tantôt il constatait seulement une déformation de l'étoile principale. Il en induit que la direction du mouvement relatif n'est pas tout à fait centrale, et présume que le disque de l'étoile principale restera déformé pendant tout le temps de la conjonction. Nous ne suivrons point Herschel dans la discussion à laquelle il se livre à ce sujet, et nous passerons aux observations que M. Struve a consignées dans son grand ouvrage *Mensuræ micrometricæ stellarum dupliciam*, etc. Laissons parler ce dernier.

« Le même phénomène, dit-il, après avoir cité les observations de William Herschel, s'est pleinement présenté à nous de 1826 à 1834. J'ai vu sans difficulté les deux étoiles en 1826; pendant l'année 1828, il était déjà difficile de les séparer; en 1829 et 1831, je n'ai point aperçu le compagnon. En 1832, j'ai cru observer une apparence de compagnon : enfin, en 1834, le compagnon s'est offert à mes regards, dégagé des rayons de l'étoile principale, et de l'autre côté qu'en 1826. Ainsi j'ai constaté, sans hésitation, ce phénomène qui se présentait inattendu. En effet, d'après le récit d'Herschel I, j'avais supposé le mouvement beaucoup plus lent. C'est pourquoi je ne m'expliquais nullement *cur comitem, anteà visam, annis* 1828 *et* 1832, *difficiliùs ei mox*

*omninò non viderem*. Grande fut ma surprise, lorsque, le 15 juin 1834, je vis nettement (je ne me souviens pas avoir jamais vu d'images d'une telle précision) le compagnon presque sur la même ligne que huit ans auparavant, autant que ma mémoire pouvait me le rappeler. Je songeais à la variabilité de la lumière du compagnon ; mais, quelle fut ma joie en transcrivant cette observation, de mon journal, sur le registre des étoiles multiples, lorsque je remarquai que le compagnon se trouvait bien à peu près sur la même ligne, mais dans la direction opposée : de là l'explication des circonstances qui m'avaient tant de fois embarrassé (*vexaverant*) pendant l'espace de huit années. Il ne me paraît y avoir aucun doute que j'aie effectivement observé le compagnon en 1832,75, quoique la distance 0″,81 surpasse probablement la véritable, qui pouvait à peine excéder elle-même 0″,5, lorsqu'en 1833 la petite étoile m'échappait entièrement. » Après une courte comparaison des observations faites jusqu'en 1834, M. Struve ajoute : « Mais ces observations, qui embrassent un intervalle de cinquante-deux ans, ne suffisent pas pour qu'on en puisse conclure, avec quelque certitude, la durée de la révolution. On pourrait faire l'hypothèse d'une durée de quatorze ans, de sorte qu'il se serait accompli une révolution de 1782 à 1795, et que deux autres auraient eu lieu de 1795 à 1826. Il faut remarquer qu'il s'est écoulé $28 = 2.14$ ans entre la disparition observée par Herschel et celle que nous avons observée nous-même. *Etenim quominùs tempus revolutionis* 28 *annorum assumamus, positio comitis à Herschelio* 1795 *primo quadranti assignata pugnat*. Mais j'avoue volontiers qu'il convient de suspendre son jugement, et d'attendre des observations ultérieures instituées avec le plus grand soin et au moyen des meilleurs instruments. »

MM. Struve ont continué, depuis, la suite des observations de l'intéressante étoile qui nous occupe; ce sont leurs observations, jointes à l'angle de position obtenu par Herschel en 1782, qui ont servi de base aux calculs dont nous présentons seulement les résultats en ce moment.

Les erreurs qui affectent les mesures de distance si difficiles à obtenir lorsqu'elles sont de 1″ environ ou au-dessous, ne paraissent pas excéder ici 0″,10 à 0″,12. Néanmoins, ces erreurs nous ont paru trop considérables, pour introduire avantageusement les distances, dans la détermination d'une première valeur approchée des éléments de l'orbite. Nous avons dû recourir à une méthode (*) différente de celle que nous avons déposée, et propre à fournir les inconnues du problème autres que le demi-grand axe, en partant des seuls angles de position. Les éléments que nous avons obtenus

(*) Cette méthode est exposée dans le premier Mémoire sur les Étoiles doubles, pages 3 et suivantes des présentes Additions.

représentent bien les angles de position, mais ils laissent dans les distances, des erreurs progressives comprises entre + 0″,14 et — 0″,18; celles-ci dépassant notablement la limite des erreurs des observations modernes, il convenait d'essayer de les atténuer par une correction des éléments. Nous allons présenter ici les deux systèmes que nous avons obtenus, puis les positions observées et le résultat de leur comparaison avec les positions déduites des éléments approchés et corrigés.

| ÉLÉMENTS de l'orbite relative de ζ d'Hercule (2084 Struve). { R = 16h 34m,8 ; D = +31° 55′ } en 1826,0 3e et 6e,5 grandeur. | PREMIÈRE approximation. | CORRIGÉS. |
|---|---|---|
| Anomalie moyenne en 1838,37. | 76°.518 | 78°,114 |
| Moyen mouvement annuel.... | 9,9104 | 9,90166 |
| Longitude du nœud ascendant. | 209° 56′,0 | 214° 20′,7 ; comptée de la partie boréale du méridien de 1838,37, vers l'est. |
| Inclinaison..... ..... | ± 128.41,6 | ±136.16,6 |
| Distance du périhélie au nœud ascendant..... | 282.42,4 | 284.54,6 |
| Angle (sin = excentricité)..... | 27.32,5 | 26.37,7 |
| Demi-grand axe (observations de MM. Struve)..... | 1″,336 | 1″,254 |
| On déduit de ces nombres : | | |
| Excentricité..... | 0,46239 | 0,44821 |
| Passage au périhélie vrai..... | 1794,324 ; 1830,649 | 1794,124 ; 1830,481 |
| Passage au périhélie apparent.. | » | 1793,740 ; 1830,097 ; 1866,454 |
| Position du périhélie apparent. | » | 299° 6′,6 ; même origine que le nœud. |
| Distance périhélie apparente .. | » | 0″,504 |
| Durée de la révolution..... | 36ans,325 | 36ans,357 |

*Comparaison avec les observations.*

| OBSERVATIONS. | | | | | OBSERVATEURS. | PREMIÈRE APPROXIMATION. | | | ÉLÉMENTS CORRIGÉS. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | ANGLE DE POSITION calculé — observé | | | ANGLE DE POSITION calculé — observé | | |
| DATES. | ANGLES de position. | DISTANCES. | GROSSISSEMENTS moyens. | NOMBRE de jours. | | dièdre. | en arc. | DISTANCE calc. — obs. | dièdre. | en arc. | DISTANCE calc. — obs. |
| | ° | " | | | | ° | " | " | ° | " | " |
| 1782,55 | 69,30 | » (*) | » | 1 | W. Herschel. | — 3,06 | — 0,076 | » | + 1,42 | + 0,035 | » |
| 1826,63 | 23,40 | 0,910 | 552 | 5 | W. Struve. | — 0,63 | — 0,011 | + 0,138 | — 2,35 | — 0,039 | + 0,044 |
| 28,735 (**) | 352,60 | 0,65 | 600 | 2 | *id.* | + 1,00 | + 0,011 | + 0,010 | — 6,99 | — 0,076 | — 0,026 |
| 32,75 | 220,50 | 0,81 | 800 | 1 | *id.* | + 2,30 | + 0,032 | 0,000 | + 5,75 | + 0,080 | — 0,012 |
| 34,45 | 203,50 | 0,910 | 1000 | 2 | *id.* | — 0,36 | — 0,006 | + 0,114 | + 1,14 | + 0,019 | + 0,067 |
| 35,45 | 196,90 | 1,094 | 1000 | 5 | *id.* | — 2,46 | — 0,047 | + 0,001 | — 2,06 | — 0,037 | — 0,048 |
| 36,60 | 186,20 | 1,090 | 920 | 5 | W. et Ot. S. | — 0,74 | — 0,015 | + 0,053 | — 1,39 | — 0,027 | + 0,011 |
| 37,47 | 175,47 | 1,097 | » | 4 | *Voir* Additamenta | + 3,57 | + 0,072 | + 0,064 | + 2,32 | + 0,046 | + 0,033 |
| 38,44 | 168,65 | 1,030 | » | 4 | *id.* | + 3,39 | + 0,069 | + 0,141 | + 1,67 | + 0,034 | + 0,126 |
| 39,67 | 160,40 | 1,165 | » | 1 | *id.* | + 2,85 | + 0,058 | + 0,008 | + 0,84 | + 0,017 | + 0,015 |
| 40,66 | 159,92 | 1,293 | 858 | 4 | W. et Ot. S. | — 3,74 | — 0,076 | — 0,122 | — 5,72 | — 0,119 | — 0,095 |
| 41,60 | 149,00 | 1,253 | 858 | 3 | Ot. Struve. | + 0,43 | + 0,009 | — 0,084 | — 1,32 | — 0,028 | — 0,040 |
| 42,64 | 144,83 | 1,247 | 858 | 3 | *id.* | — 2,88 | — 0,059 | — 0,078 | — 4,18 | — 0,090 | — 0,017 |
| 45,27 | 119,06 | 1,248 | 582 | 5 | *id.* | + 4,23 | + 0,088 | — 0,059 | + 4,75 | + 0,106 | + 0,031 |
| 47,18 | 108,40 | 1,410 | 858 | 4 | *id.* | + 1,98 | + 0,042 | — 0,185 | + 4,02 | + 0,093 | — 0,090 |

(*) En 1782,55, la distance n'a pas été observée; la distance calculée par les éléments corrigés est 1",429.

(**) La position de 1828,735 est la moyenne de deux observations que M. Struve a trouvées peu sûres; il ne les a point comprises dans son tableau des positions moyennes. Nous n'avons point fait usage de cette position dans la première approximation.

Les éléments corrigés représentent mieux les distances que les premiers ; mais on doit remarquer que les angles de position sont moins bien représentés que dans la première approximation : on pouvait s'y attendre. La discordance de quelques observations montre que les erreurs de nos éléments corrigés n'excèdent point celles des observations elles-mêmes; ainsi, il est manifeste que l'angle de position, décrit de 1839 à 1840, est en erreur de 6°,5 environ, ou en arc de 0″,12 à 0″,13. Pareillement, les distances de 1838 et 1840 discordent entre elles de 0″,20 à 0″,21, et peuvent être considérées comme affectées d'erreurs à peu près moitié moindres et de sens contraires. Un court examen des chiffres que nous venons de présenter, suffit pour montrer le degré d'incertitude qui peut encore affecter nos résultats, et la nécessité d'attendre de nouvelles observations, pour en obtenir de plus précis.

S'il est exact de dire que nos éléments représentent les observations accompagnées de mesures, et concordent, ainsi qu'on le verra tout à l'heure, avec les indications fournies par M. Struve à l'époque de la conjonction qu'il a observée, il faut avouer qu'il n'en est pas de même à l'égard des indications fournies par William Herschel dans une circonstance du même genre. Pour mettre ceci en évidence, nous allons donner les positions assignées par nos éléments corrigés, aux époques de ces observations :

| DATES. | ANGLES DE POSITION calculés. | DISTANCES calculées. | |
|---|---|---|---|
| | ° | ″ | |
| 1793,740 | 29),39 | 0,504 | Périhélie apparent. |
| 1795,76 | 237,64 | 0,712 | |
| 1802,6 | 166,67 | 1,167 | |
| 1803,274 | 161,75 | 1,180 | |
| 1829,74 | 313,12 | 0,514 | |
| 1830,097 | 299,16 | 0,504 | Périhélie apparent. |
| 1831,65 | 247,58 | 0,644 | |

Suivant nous, le passage au périhélie aurait eu lieu en 1793,74. Herschel, après ses observations de 1795, 1802 et 1803, présume que le disque de l'étoile principale restera déformé pendant toute la durée de la conjonction, qu'il suppose donc postérieure à 1803. En 1795, William Herschel, sans pouvoir prendre aucune mesure, assigna néanmoins, pour le lieu de la petite étoile, le premier quadrant, tandis que nous la plaçons à cette époque dans le quadrant opposé. La distance étant alors 0″,7, les deux étoiles n'auront-elles pas pu se confondre pour l'observateur, et celui-ci n'aurait-il pas

pris pour la petite étoile, une fausse image, s'il n'existe d'ailleurs aucune erreur dans la rédaction ou la copie de l'observation? En 1802 et 1803, les distances 1″,17 et 1″,18 étant encore faibles, sans avoir varié sensiblement, Herschel, qui trouvait toujours le disque de l'étoile principale un peu déformé, a pu croire que le passage au périhélie n'avait pas encore eu lieu. Il est à regretter qu'il n'ait pas suivi ζ d'Hercule depuis cette époque.

Quant aux indications fournies par M. Struve, elles se bornent à ce qu'en 1829 et 1831, époques antérieure et postérieure à celle du passage au périhélie apparent, il n'a pu voir la petite étoile. Les distances 0″,51 et 0″,61, jointes à l'éclat de l'étoile principale, expliquent suffisamment ces circonstances.

Nous soumettons les faits qui précèdent à l'appréciation des astronomes, et principalement à l'illustre fils du grand observateur auquel nous devons la découverte du mouvement des étoiles doubles. La connaissance qu'il possède des moyens d'observation dont se servait son père, et la possibilité de consulter ses notes manuscrites, le mettront probablement à même d'éclaircir les faits que nous venons de signaler, s'ils lui paraissent dignes de quelque intérêt.

Nous terminerons cette Note en montrant, par un exemple que nous a présenté l'orbite de ζ d'Hercule, combien l'indétermination des éléments peut être considérable, lorsque les observations n'embrassent pas un assez long espace de temps, ou ne sont pas convenablement réparties sur la trajectoire apparente. Nous avons trouvé que, si l'on ne cherche à représenter que les douze observations comprises de 1828 à 1847, et embrassant plus de la moitié de la durée de la révolution, on peut y satisfaire au moyen de systèmes d'éléments dans lesquels l'excentricité varie de 0,44 à 1,63; l'orbite, d'elliptique devenant hyperbolique, et la durée de la révolution croissant jusqu'à l'infini, pour devenir imaginaire ensuite. Les autres éléments subissent des variations correspondantes, mais moins prononcées. Encore n'avons-nous pas la prétention de donner ici les limites hors desquelles les douze observations ci-dessus cesseraient d'être représentées.

# DEUXIÈME NOTE
SUR LES
# ÉTOILES DOUBLES,

Par M. YVON VILLARCEAU.

(Présentée à l'Académie des Sciences, le 26 mars 1849.)

## *η de la Couronne boréale.*

Ce système est composé de deux étoiles de 5ᵉ à 6ᵉ grandeur et de couleur à peu près la même, estimée blanchâtre par William Herschel, jaunâtre par M. Struve. Le lieu moyen de $\eta$ de la Couronne est, en 1826,0,

$$\text{R} = 15^{h}\,16^{m},1;$$
$$\text{D} = +30^{o}\,56',1.$$

Sir John Herschel indique l'existence, dans le voisinage de ce système, d'une petite étoile de 15ᵉ grandeur, distante de 30 secondes environ de l'une des deux étoiles précédentes, et dont l'angle de position est 33° 59′ (l'époque n'est point donnée). Ne possédant aucun renseignement qui me permette de juger si cette étoile participe ou non au mouvement commun du système, et considérant d'ailleurs que les distances des étoiles principales dépassent à peine 1″,3, j'ai dû faire complétement abstraction de la troisième étoile, dans l'étude que j'ai entreprise du mouvement de $\eta$ de la Couronne.

L'égalité approchée, tant de l'éclat que de la couleur des deux étoiles, rend très-difficile l'interprétation des deux observations faites par William Herschel à des époques éloignées, en 1781 et 1802. Lorsque deux étoiles sont de grandeur très-sensiblement différente, on rapporte toujours le lieu de la plus petite à celui de la plus belle ; aucune confusion n'est possible. Lorsqu'elles sont à peu près égales, on est exposé à prendre pour fixe relativement, tantôt l'une, tantôt l'autre; et, à cela, il n'y a aucun inconvénient, si les observations ne sont pas séparées par un trop long intervalle de temps : on reconnaît bien vite celles des positions qu'il faut modifier de 180 degrés, pour les rendre comparables aux positions voisines. Mais si, comme dans le cas actuel, il s'est écoulé vingt et une années entre les deux observations primitives, puis vingt et une autres années, de 1802 à 1823, époque à laquelle commence la série des nouvelles observations, on est très-exposé à se tromper dans l'interprétation des deux anciennes observations, quand il s'agit de les relier soit entre elles, soit avec les nouvelles.

Il est effectivement possible d'interpréter de deux manières différentes les positions de 1781 et de 1802, tout en maintenant l'accord entre ces observa-

tions, et dix-huit autres, dont deux seulement incomplètes, et qui s'étendent de 1823 à 1847 inclusivement: de là deux solutions très-distinctes, du problème qui consiste à déterminer les circonstances du mouvement elliptique de $\eta$ de la Couronne. Je ne sache pas que cette double solution ait été entrevue.

M. Struve, dans son grand ouvrage sur les *Mesures micrométriques*, etc., dit : « Ces étoiles offrent un système dans lequel le temps de la révolution est d'environ quarante-trois ans. Cela me paraissait déjà probable en 1829, comme résultant de la comparaison des angles observés par Herschel I en 1781 et 1802, et était devenu pour moi une certitude en 1831. Herschel II arrive à la même conséquence, et l'établit le premier publiquement dans son livre remarquable, *Micrometrical measures of* 364 *double stars*, 1832. »

Sir John Herschel, dans une *Notice sur l'orbite elliptique de* $\xi$ *du Bouvier, etc.* (1833), donne des éléments de l'orbite de l'étoile $\eta$ de la Couronne; et la durée de la révolution, entre autres, y est fixée à $44^{ans},242$. Il a fait usage, pour arriver à ce résultat, des deux observations de 1781 et 1802, d'une observation de 1819 communiquée par M. Struve, et de sept autres positions s'étendant de 1823 à 1833. Il faut remarquer que l'observation de 1819 ne figure pas dans le grand ouvrage de M. Struve. Cette observation me paraît inconciliable avec l'ensemble de celles dont j'ai moi-même fait usage. Il n'est pas étonnant, dès lors, que sir John Herschel n'ait pu concilier son observation de 1823 avec les autres.

M. Mädler s'est aussi occupé de la même étoile; il en a donné successivement deux orbites peu différentes, et est parvenu, en dernier lieu, à une durée de la révolution de $43^{ans},2459$ (Mädler, édition de 1846, *Populäre Astronomie*). Il n'a point fait usage de l'observation de 1819; celles dont il disposait n'allaient pas au delà de 1842.

Les astronomes que je viens de citer, s'accordent donc à attribuer à la révolution une durée de quarante-trois à quarante-quatre ans.

J'ai entrepris l'étude de $\eta$ de la Couronne, sans me préoccuper de ce qui avait déjà été fait sur cette étoile. Pour cet objet, je me suis servi des observations que MM. Struve ont bien voulu me communiquer, en y appliquant les formules que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, le 6 décembre 1847. Les résultats auxquels je suis parvenu, m'obligent à indiquer brièvement la marche que j'ai suivie.

Les observations de MM. Struve sont complètes et au nombre de quinze; elles vont de 1826 à 1847 : j'en ai d'abord laissé quatre de côté, à cause des erreurs manifestes qui affectent les distances; ce sont celles de 1835, 1837, 1838 et 1839. J'ai déduit, des onze autres observations, de certaines relations entre les éléments, qui font dépendre ces derniers d'une indéterminée restant arbitraire entre des limites très-étendues. La durée de la révolution, par exemple, peut y varier de trente-huit à cent cinquante ans, sans que l'en-

semble de ces observations, auxquelles on peut joindre celle de sir John Herschel en 1823, cesse d'être représenté dans les limites d'erreurs admissibles.

Ainsi, ces observations, qui embrassent un intervalle de vingt-quatre années, et comprennent un déplacement angulaire de 176 degrés, ne suffisent pas pour déterminer, même approximativement, les éléments de l'orbite. Il devint indispensable de recourir aux anciennes observations, et, comme il ne restait qu'une arbitraire, j'en disposai de manière à satisfaire à l'observation de 1802, plus voisine de l'époque actuelle que celle de 1781. J'admis pour l'époque 1802,69, la position 359° 40′, publiée deux fois (*) par sir John Herschel, quoique la position 89° 40′ North-Following, donnée dans les *Transactions philosophiques* par William Herschel, soit équivalente à 0° 20′; d'où incertitude de 40 minutes sur cette position. J'ai dû supposer que sir John Herschel avait reconnu l'existence d'une erreur et l'avait corrigée. Or, il se trouve que la valeur de l'indéterminée qui satisfait à l'observation de 1802, satisfait en même temps à celle de 1781, si l'on renverse cette dernière, c'est-à-dire si l'on ajoute 180 degrés à l'angle de position, ce qui est très-admissible ici. Le problème semble donc résolu, ou du moins il ne reste plus qu'à faire subir aux éléments approchés de légères corrections, de manière à représenter mieux, s'il est possible, l'ensemble des observations. Je fis ces corrections, et j'obtins ainsi une première solution, dans laquelle la durée de la révolution est fixée, très-approximativement, à $66^{ans},257$.

Je ne me suis point arrêté à ce résultat, et j'ai cru devoir essayer de montrer qu'une autre solution était impossible. A cet effet, je renverse l'observation de 1802, et je détermine une nouvelle valeur de l'arbitraire ci-dessus mentionnée, de manière à satisfaire à cette observation renversée. Je déduis des nouveaux éléments, la position pour 1781, et je trouve que cette position coïncide, à très-peu près, avec celle qui a été observée, sans qu'il soit nécessaire, comme la première fois, de la renverser. J'arrive ainsi à une nouvelle solution, à laquelle répond une durée de la révolution de $42^{ans},501$.

Les données géométriques du problème admettent donc une double solution, différente de celle qu'on rencontre dans la théorie des planètes et des comètes, et ne tenant qu'à la double interprétation qu'on peut se permettre des deux anciennes observations de William Herschel.

Avant d'essayer de distinguer laquelle de ces deux solutions est la vraie, je dois les présenter, et y joindre la comparaison avec les observations; on sera mieux à même de comprendre qu'il faut chercher ailleurs que dans les considérations purement géométriques, la solution de la difficulté qui se présente ici.

---

(*) *Observations... of* 380 *double et triple stars*, 1825; page 225; et *Micrometrical measures of* 364 *double stars*. J. H. 1832; page 25.

| ÉLÉMENTS DE L'ORBITE RELATIVE de η de la Couronne. En 1826,0 { Æ = 15h 16m,1 ; D = +30° 56′,1 } 5-6e grandeur. | PREMIÈRE SOLUTION, en admett. { 1781,69 position 210° 41′ ; 1802,69 » 359.40 } | DEUXIÈME SOLUTION, en admett. { 1781,69 position 30° 41′ ; 1802,69 » 179 40 } |
|---|---|---|
| Passage au périhélie vrai........................ | 1780,124; 1846,381 | 1805,666; 1848,167 |
| Moyen mouvement annuel..................... | 5°,4334 | 8°,4702 |
| Angle (sin = excentricité)...................... | 28° 0′,1 | 28° 19′,2 |
| Longitude du nœud ascendant, comptée du Nord en 1835,0, vers l'Est........................ | 4.25,2 | 10.31,1 |
| Distance du périhélie au nœud ascendant.......... | 194.36,8 | 227. 9,5 |
| Inclinaison.................................. | ± 58. 3,3 | ± 65.39,2 |
| Demi-grand axe (observations de MM. Struve).... | 1″,1108 | 1″,0125 |

D'où il suit :

| | PREMIÈRE SOLUTION | DEUXIÈME SOLUTION |
|---|---|---|
| Durée de la révolution.......................... | 66ans,257 | 42ans,501 |
| Excentricité.................................... | 0,46950 | 0,47441 |

| | DATES. | POSITION. | DISTANCE. | DATES. | POSITION. | DISTANCE. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Plus petit périhélie apparent.................... | 1784,677; 1850,934 | 258° 16′ | 0″398 | 1807,237; 1849,738 | 274° 4′ | 0″239 |
| Plus grand aphélie apparent...................... | 1810,298; 1876,555 | 8.41 | 1,611 | 1820,227; 1862,728 | 20.27 | 1,293 |
| Plus grand périhélie apparent.................... | 1772,781; 1839,038 | 116.45 | 0,494 | 1796,398; 1838,899 | 116. 6 | 0,483 |
| Plus petit aphélie apparent...................... | 1778,553; 1844,810 | 178 14 | 0,600 | 1802,343; 1844,844 | 178.42 | 0,632 |

(Les angles de position des périhélies et aphélies apparents sont comptés de la même origine que le nœud ascendant.)

*Comparaison avec les observations.*

| OBSERVATIONS. | | | | | | OBSERVATEURS. | PREMIÈRE SOLUTION. | | | DEUXIÈME SOLUTION. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DATES. | ANGLES de position. | DISTANCES. | GROSSISSEMENTS moyens. | NOMBRE de jours d'observations. | | ANGLE DE POSITION calculé — observé | | DISTANCE calc. — obs. | ANGLE DE POSITION calculé — observé | | DISTANCE calc. — obs. |
| | | | | | | dièdre. | en arc. | | dièdre. | en arc. | |
| | ° ′ | ″ | | | | ° ′ | ″ | ″ | ° ′ | ″ | ″ |
| 1781,69 | 210.41 ou 30.41 | » | 932? | 1 | W. Hersch. | — 1.30 | — 0,013 | » | — 2.11 | — 0,046 | » |
| 1802,69 | 359.40 ou 179.40 | » | » | 1 | *id.* | — 0.28 | — 0,012 | » | + 1.56 | + 0,021 | » |
| 23,27 | 25.57 | » | » | » | J. H. et So. | + 0.47 | + 0,018 | » | + 0.26 | + 0,009 | » |
| 26,77 | | 35°28ᶜ | 1,075 | 600 | W. Struve. | — 0.53 | — 0,017 | + 0,042 | — 1. 7 | — 0,023 | + 0,043 |
| 29,55 | | 43,25 | 0,960 | 600 | *id.* | — 0.41 | — 0,011 | — 0,010 | — 1. 1 | — 0,017 | + 0,003 |
| 30,303 | | 44,48 | 0,820 | » | 8 | J. Herschel. | + 0.50 | + 0,013 | + 0,083 | + 0 26 | + 0,007 | + 0,096 |
| 31,63 | | 50,63 | 0,883 | 600 | 3 | W. Struve. | + 0.17 | + 0,004 | — 0,065 | — 0.14 | + 0,003 | — 0,053 |
| 32,76 | | 56,87 | 0,790 | 933 | 3 | *id.* | — 0. 9 | — 0,002 | — 0,044 | — 0 46 | — 0,010 | — 0,035 |
| 35,41 | | 74,28 | 0,730 | 900 | 6 | *id.* | + 1.20 | + 0,014 | — 0,137 | + 0.42 | + 0,007 | — 0,140 |
| 36,52 | | 88,77 | 0,563 | 967 | 6 | *id.* | — 2.21 | — 0,022 | — 0,019 | — 2.41 | — 0,025 | — 0,027 |
| 37,47 | | 95,44 | 0,385 | » | 4 | *Voir* l'Addit. | + 1 40 | + 0,015 | + 0,128 | + 1.49 | + 0,016 | + 0,117 |
| 38,44 | | 107,04 | 0,366 | » | 5 | *id.* | + 2. 2 | + 0.018 | + 0,130 | + 2.50 | + 0,024 | + 0,119 |
| 39,82 | | 127,05 | 0,586 | 609 | 3 | Ot. Struve. | — 0.19 | — 0,003 | — 0,088 | + 1.21 | + 0,011 | — 0,095 |
| 40,52 | | 137,80 | 0,518 | 1036 | 6 | *id.* | — 2.26 | — 0,021 | — 0,008 | — 0.31 | — 0,005 | — 0,012 |
| 41,50 | | 151,25 | 0,522 | 936 | 4 | *id.* | — 4.34 | — 0,042 | + 0,012 | — 2.35 | — 0,024 | + 0,016 |
| 43,30 | | 165,00 | 0,570 | 858 | 3 | *id.* | — 0.12 | — 0,002 | + 0,012 | + 1. 5 | + 0,012 | + 0,034 |
| 45,61 | | 183,13 | 0,577 | 910 | 6 | W. et Ot. S. | + 2. 3 | + 0,021 | + 0,017 | + 1.36 | + 0,017 | + 0,045 |
| 46,61 | | 193,93 | 0,557 | 858 | 3 | Ot. Struve. | + 0.29 | + 0,005 | + 0,011 | — 0.27 | — 0,004 | + 0,014 |
| 46,88 | 196.46 | » | » | » | » | Dawes. | + 0.19 | + 0.003 | » | — 0.34 | — 0,005 | » |
| 47,64 | | 201,78 | 0,495 | 858 | 5 | Ot. Struve. | + 3.27 | + 0,031 | + 0,028 | + 3.40 | + 0,030 | — 0,028 |

*Tableau complémentaire du précédent.*

| DATES. | DISTANCES CALCULÉES. | |
|---|---|---|
| | Première solution. | Deuxième solution. |
| 1781,69 | 0″,507 | 1″,224 |
| 1802,69 | 1,493 | 0,631 |
| 1823,27 | 1,299 | 1,251 |
| 1846,88 | 0,558 | 0,549 |

Les erreurs qui subsistent dans l'une et l'autre solution sont toutes très-faibles, sauf celles qui se rapportent aux quatre distances que nous avons mentionnées comme relativement défectueuses; l'on ne pourrait donc s'autoriser de ce que la première solution présente, à la fin de la série, deux suites d'erreurs de même signe, pour juger l'autre plus admissible. En effet, nous pouvons nous reporter aux déterminations des erreurs probables des mesures micrométriques données par M. Struve dans son grand ouvrage. Il déduit de ses observations, les nombres suivants qui sont relatifs aux étoiles brillantes :

| DISTANCE moyenne. | ERREUR PROBABLE D'UNE OBSERVATION | | |
|---|---|---|---|
| | SUR L'ANGLE DE POSITION | | SUR LA DISTANCE. |
| | dièdre. | en arc. | |
| ″ 0,70 | ° ′ 2.30,9 | ″ 0,031 | ″ 0,074 |
| 1,48 | 1.52,4 | 0,048 | 0,086 |
| | ERREUR PROBABLE DE LA MOYENNE DE TROIS OBSERVATIONS. | | |
| ″ 0,70 | ° ′ 1.27,1 | ″ 0,018 | ″ 0,042 |
| 1,48 | 1. 3,6 | 0,028 | 0,050 |

Dans le cas qui nous occupe, les distances varient de 0″,5 à 1″,5 à peu près. Les erreurs probables sur la moyenne de trois mesures peuvent être

prises de 0″,02 à 0″,03 pour les angles de position, et 0″,04 à 0″,05 pour les distances. Or, dans la première solution, le plus grand nombre des erreurs sont au-dessous de 0″,02 pour les angles de position; deux seulement s'élèvent, l'une à 0″,04, l'autre à 0″,03. Les erreurs des distances, sauf celles qui sont relatives aux quatre observations sus-mentionnées et à l'observation de 1830,303 de sir John Herschel, restent au-dessous de l'erreur probable. Cette dernière ne peut être comparée rigoureusement, parce que le grand axe a été déduit des seules observations de MM. Struve. Dans la deuxième solution, l'erreur relative à l'observation de 1781 s'écarte un peu de l'erreur probable.

Nous ne voyons donc, jusqu'ici, aucun motif sérieux de préférer l'un de ces systèmes à l'autre.

Examinons maintenant si l'on ne pourrait pas tirer parti d'une indication extraite des manuscrits de William Herschel, et à laquelle, du reste, sir John Herschel n'attribue pas une grande importance. En 1794,58, William Herschel vit le compagnon dans le quadrant Nord-Suivant, que nous pouvons interpréter: Sud-Précédent. A cette époque, la position tirée de la première solution est 344° 8′, avec une distance égale à 1″,083; elle donnerait: Nord-Précédent. Cette position ne s'accorderait, avec l'indication d'Herschel, qu'en admettant qu'il aurait fait l'erreur d'écrire N. F. au lieu de N. P., ce qui, du reste, n'aurait rien d'étonnant. (D'après ce que nous avons établi en commençant, une semblable erreur affecte, soit l'observation de 1802, soit sa reproduction par sir John Herschel.) Si nous passons à la deuxième solution, nous trouverons, pour la même époque: position, 92° 14′; distance, 0″,514, ce qui donne: Sud-Suivant. On devra remarquer combien cette position est voisine du parallèle de déclinaison passant par l'étoile centrale, et qu'il devait dès lors être très-difficile de décider si le compagnon était effectivement dans le quadrant Sud-Suivant, plutôt que dans le quadrant Nord-Suivant. D'ailleurs, cette circonstance remarquable des deux étoiles situées sur le même parallèle aurait nécessairement été notée par Herschel, de préférence à la vague indication N. P. ou N. F.

La discussion à laquelle nous venons de nous livrer, semble moins favorable à la deuxième solution qu'à la première. Néanmoins, nous ne pouvons rien en induire de concluant.

Ayant épuisé les diverses considérations géométriques fournies par le sujet lui-même, il devient indispensable d'avoir égard aux circonstances physiques des observations de 1781 et 1802. Or, on lit dans les *Transactions philosophiques*, tome LXXII, page 119:

« η *Coronæ*, 9 septembre 1781. Double, un peu inégales, blanchâtres; elles paraissent en contact avec un grossissement de 227 fois; et, quoique

je puisse les voir avec ce grossissement, je ne les aurais certainement pas découvertes avec lui. Avec 460 fois, elles sont séparées d'un intervalle moindre qu'un quart de diamètre; avec 932 fois, elles sont parfaitement séparées, et l'intervalle un peu plus grand qu'avec 460. » Herschel ajoute qu'il trouve trop fort, pour ces étoiles, le grossissement de 2010 fois. On lit encore dans la même collection, vol. de 1803, page 349: « 6 septembre 1802. » *Coronæ*. Position, 89°42′ Nord-Suivant. Deuxième mesure, 89°38′; moyenne des deux, 89°40′. Erreur avec la moyenne, 2 minutes. En considérant ces observations, nous ne nous tromperons pas, si nous admettons que dans des circonstances favorables, et avec des soins convenables, on pourra déduire de la moyenne de deux mesures micrométriques, la position d'une étoile double, à 1 degré près. »

Joignons enfin à ces documents les distances fournies par nos éléments :

| DATES. | DISTANCES. | |
|---|---|---|
| | Première solution. | Deuxième solution. |
| 1781,69 | 0″,507 | 1″,224 |
| 1802,6 | 1,493 | 0,631 |

Le récit que fait Herschel, de l'observation de 1781, montre que cette observation a été difficile, à cause de la faible distance des étoiles. Avec 227 fois, les étoiles lui paraissaient en contact. Il a employé des grossissements de plus en plus forts, jusqu'à celui de 2010 fois, auquel il a été obligé de renoncer. Ces circonstances sont mieux en rapport avec la distance 0″,507 qu'avec la distance 1″,224. Herschel aurait, en effet, vu plus facilement les étoiles séparées, avec le grossissement de 460 fois, si leur distance s'était trouvée de 1″,2. La discussion de cette observation rend donc plus probable la première solution que la deuxième.

Quant à l'observation de 1802, nous voyons Herschel se borner à deux mesures qui sont d'ailleurs concordantes. L'observation ne semble lui présenter aucune difficulté. Cela se conçoit dans la circonstance favorable qu'il rappelle, si la distance des étoiles est 1″,49 ou environ; mais on aurait de la peine à le comprendre, s'il s'agissait de la distance 0″,63 qui répond à la deuxième solution.

Nous sommes donc conduits à regarder la première solution comme plus probable que la deuxième, sinon comme la véritable. Nos prévisions à cet

égard seront confirmées ou détruites d'ici à quatre années au plus. En effet, le calcul donne

| DATE. | PREMIÈRE SOLUTION. | | DEUXIÈME SOLUTION. | |
|---|---|---|---|---|
| | Position. | Distance. | Position. | Distance |
| 1853,677 | 303.44′ | 0″,512 | 356.30′ | 0″,767 |

Les angles de position, à cette époque, différeront de 53 degrés environ; on ne pourra donc pas confondre, tandis qu'on répondrait à peine d'une différence de 0″,25 sur de si faibles distances. Très-probablement, il sera possible de séparer les deux orbites avant cette époque; mais n'ayant jamais observé l'étoile $\eta$ de la Couronne avec un instrument aussi puissant que la grande lunette de l'observatoire de Poulkova, je ne pourrais affirmer que les deux étoiles seront encore séparées pour cet instrument, lorsque le compagnon n'aura pas notablement dépassé le plus petit périhélie apparent dans l'une ou l'autre des deux orbites.

Si l'on conçoit, d'ailleurs, qu'il faille encore tenir compte des erreurs des éléments, on reconnaîtra qu'il n'est pas convenable de fixer une époque trop rapprochée, pour le choix à faire entre les deux solutions.

# TROISIÈME NOTE

SUR LES

# ÉTOILES DOUBLES,

Par M. YVON VILLARCEAU.

(Présentée à l'Académie des Sciences, le 14 mai 1849.)

## ξ *de la grande Ourse.*

Nous avons eu l'occasion de mentionner, dans notre première Note, l'application que Savary a faite de ses formules à l'étoile ξ de la grande Ourse. Les observations dont il disposait n'allaient que jusqu'à 1827; il est néanmoins remarquable que les déterminations qu'il en a déduites, ne s'écartent pas davantage de celles auxquelles on arrive en employant des observations qui comprennent vingt années de plus. Mais le savant académicien n'a publié aucun détail sur la substitution qu'il a faite, des données d'où il est parti, aux positions observées. M. Mâdler s'est, depuis, occupé de la même étoile; et en faisant usage d'observations qui s'étendent jusqu'à 1841, il a obtenu des éléments qui ne diffèrent pas notablement de ceux que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Le système de ξ de la grande Ourse se compose de deux étoiles de 4$^e$ et 5$^e$ grandeur, suivant M. Struve. MM. John Herschel et South les taxent de 6$^e$ grandeur, presque égales. La plus ancienne des observations que l'on en possède est de 1781,97; elle est due à Herschel On lui doit, en outre, deux observations faites en 1802 et 1804; celles-ci, au point de vue de la détermination des éléments, n'équivalent qu'à une seule position distincte. Depuis 1819 jusqu'à l'époque actuelle, de nombreuses observations ont été faites par divers astronomes; elles forment une suite presque non interrompue.

J'ai obtenu une première approximation, en faisant l'application de la nouvelle méthode que j'ai présentée à l'Académie dans sa séance du 26 mars. A cet effet, et pour diminuer la longueur des calculs, j'ai réuni en six groupes d'angles de position et autant de distances, vingt observations d'angles de position et dix-sept de distances, s'étendant de 1819 à 1847. Une construction graphique m'avait montré la possibilité d'opérer ce groupement, sans que la variation du mouvement apparent dût entraîner des erreurs notables ou comparables à celles des observations elles-mêmes. Ainsi que je l'avais prévu, j'ai reconnu que ces observations seules, quoiqu'elles embrassent vingt années et comprennent un déplacement angulaire apparent de 152 de-

grés, sont neanmoins insuffisantes pour la détermination des éléments de l'orbite. Par exemple, on peut y satisfaire, dans la limite d'erreurs tolérables, en élevant la durée de la révolution à cent soixante-six ans; très-probablement, on pourrait encore la porter au delà de ce chiffre, comme en deçà du véritable, qui est $61^{ans},5$ environ. Il y a plus: le problème, dans cette circonstance, est doublement indéterminé, en ce sens que deux des constantes d'où dépendent les éléments, peuvent recevoir des variations indépendantes. Les anciennes observations sont nécessaires et suffisantes pour lever cette double indétermination: en comparant celle de 1781,97 aux observations modernes, on obtient immédiatement pour valeur approchée de la durée de la révolution, soixante-deux ans. Le moyen mouvement s'en déduit; il en résulte une équation de condition entre les deux constantes indéterminées, propre à fournir aisément l'une de celles-ci en fonction de l'autre. De cette manière, il ne reste plus qu'une arbitraire dont on fixe la valeur, par la condition de satisfaire à un angle de position unique obtenu en combinant les deux observations de 1802 et 1804. Le degré d'approximation du résultat auquel je suis parvenu de la sorte est satisfaisant, malgré l'emploi d'observations un peu défectueuses faites de 1819 à 1823, dont l'effet a été d'altérer les angles de position calculés dans cet intervalle. (Plusieurs de ces observations ont été faites aux instruments méridiens.)

S'il ne s'était agi que d'obtenir une orbite de ξ de la grande Ourse, j'aurais pu m'arrêter à cette première détermination; mais il est important, pour la discussion des observations et le perfectionnement des procédés micrométriques auquel cette discussion peut conduire, d'obtenir le plus grand degré possible de précision. Aussi, me suis-je proposé de corriger mes premiers éléments, en faisant usage de toutes les observations connues d'angles de position, deux seuls exceptés, et de toutes les mesures de distances obtenues par MM. Struve postérieurement à 1825. Je venais de terminer la première partie de mon travail, lorsque j'ai reçu de M. Otto Struve une observation de 1848; je l'ai employée dans la correction des éléments.

Au moyen des différences provenant de la comparaison des observations avec les éléments approchés, j'ai formé huit groupes pour les angles de position, et cinq pour les distances. J'en ai déduit des positions dites *normales*, que j'ai substituées aux observations. Les éléments corrigés en faisant usage de ces positions normales, et comparés aux observations, m'ont donné, pour chacun des groupes ci-dessus, des erreurs dont les moyennes sont, à très-peu près, égales aux erreurs que fournit la comparaison avec les positions normales. De ce fait résulte la preuve que je n'aurais pas obtenu sensiblement plus de précision en opérant sur toutes les observations, au lieu d'opérer sur les positions normales. Voici le résultat de mes calculs :

| ÉLÉMENTS DE L'ORBITE RELATIVE de ξ de la grande Ourse. En 1826,0 { AR = 11h 8m,8 ; D = +32° 30′ } 4-5e grandeur. | PREMIÈRE APPROXIMATION. | DEUXIÈME APPROXIMATION. |
|---|---|---|
| Passage au périhélie vrai | 1817,436; 1879,436 | 1816,859; 1878,435 |
| Moyen mouvement annuel | 5°,8064 | 5°,8464 |
| Angle (sin = excentricité) | 26° 2′,0 | 25° 33′,7 |
| Longitude du nœud ascendant, comptée du Nord en 1834,4, vers l'Est | 276. 5,5 | 275.50,0 |
| Distance du périhélie au nœud ascendant | 311. 5,3 | 308.57,2 |
| Inclinaison | ± 128.22,6 | ± 127.11,4 |
| Demi-grand axe (observations de MM. Struve) | 2″,4082 | 2″,4389 |
| **On en déduit :** | | |
| Durée de la révolution | 62ans,0 | 61ans,576 |
| Excentricité | 0,43891 | 0,43148 |

| | DATES. | POSITION. | DISTANCE. |
|---|---|---|---|
| | | ° ′ | ″ |
| Plus grand aphélie apparent | 1795,111; 1856,687 | 112.46,4 | 3,0338 |
| Plus petit périhélie apparent | 1814,760; 1876,336 | 356.12,5 | 0,8891 |
| Plus petit aphélie apparent | 1824,461; 1886,037 | 247.15,2 | 1,7187 |
| Plus grand périhélie apparent | 1828,881; 1890,457 | 218.25,8 | 1,6924 |

(Les angles de position des périhélies et aphélies apparents sont comptés de la même origine que le nœud ascendant.)

*Comparaison avec les observations.*

| OBSERVATIONS. | | | | | OBSERVATEURS. | PREMIÈRE APPROXIMATION. | | | DEUXIÈME APPROXIMATION. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | ANGLE DE POSITION calculé — observé | | | ANGLE DE POSITION calculé — observé | | |
| DATES. | ANGLES de position. | DISTANCES. | GROSSISSEMENTS moyens. | NOMBRE de jours d'observations. | | dièdre. | en arc. | DISTANCE calc. — obs | dièdre. | en arc. | DISTANCE calc. — obs. |
| 1781,97 | 143.47′ | ″ » | » | 1 | W. Herschel. | ° ′ — 0.22 | ″ — 0,016 | ″ » | ° ′ + 0.16 | ″ + 0,011 | ″ » |
| 1802,09 | 97.31 | » | » | 1 | *id.* | + 0.42 | + 0,034 | » | + 0.11 | + 0,009 | » |
| 1804,08 | 92.38 | » | » | 1 | *id.* | + 0.32 | + 0,024 | » | — 0. 8 | — 0,006 | » |
| 19,10 | 284 33 | » | » | 2 | W. Struve. | + 5.34 | + 0,129 | » | + 1. 0 | + 0,025 | » |
| 20,13 | 276.21 | » | » | 3 | *id.* | + 3.54 | + 0,099 | » | + 0.26 | + 0,012 | » |
| 21,78 | 264.42 | » | » | 3 | *id.* | + 2.21 | + 0,065 | » | + 0. 4 | + 0,002 | » |
| 23,29 | 258.27 | » | » | 4 | J. H. et So. | — 2. 8 | — 0,061 | » | — 3.40 | — 0,110 | » |
| 25,22 | 242.32 | » | » | » | South. | + 0.40 | + 0,019 | » | — 0.10 | — 0,005 | » |
| 26,20 | 238.45 | 1,747 | 600 | 3 | W. Struve. | — 2.10 | — 0,063 | — 0,080 | — 2.43 | — 0,081 | — 0,038 |
| 26,20 | 238.17 | » | » | » | South. | — 1 42 | — 0,049 | » | — 2.15 | — 0,067 | » |
| 27,27 | 228.16 | 1,715 | 570 | 4 | W. Struve | + 1. 4 | + 0,031 | — 0,051 | + 0.47 | + 0,023 | — 0,015 |
| 28,37 | 224. 1 | » | » | » | J. Herschel. | — 2. 8 | — 0,062 | » | — 2.13 | — 0,065 | » |
| 29,02 | 219. 0 | » | » | » | *id.* | — 1.31 | — 0,044 | » | — 1.30 | — 0,044 | » |
| 29,35 | 213.35 | 1,671 | 583 | 7 | W. Struve. | + 1.40 | + 0,049 | 0,000 | + 1.44 | + 0,051 | + 0,022 |
| 30,58 | 206.18 | » | » | » | J. Herschel. | + 0.45 | + 0,022 | » | + 0.55 | + 0,027 | » |
| 31,08 | 201.32 | » | » | » | Bessel. | + 2.15 | + 0,067 | » | + 2.26 | + 0,073 | » |
| 31,25 | 201. 7 | » | » | » | J. Herschel. | + 1.34 | + 0,046 | » | + 1.45 | + 0,052 | » |
| 31,34 | 201.55 | » | » | » | Dawes. | + 0.11 | + 0,006 | » | + 0.22 | + 0,011 | » |
| 31,44 | 203.49 | 1,706 | 600 | 5 | W. Struve. | — 2.22 | — 0,071 | + 0,002 | — 2.10 | — 0,065 | + 0,013 |
| 32,16 | 198.10 | » | » | » | J. Herschel. | — 1.18 | — 0,039 | » | — 1. 6 | — 0,033 | » |

*Comparaison avec les observations.* (Suite.)

| OBSERVATIONS. | | | | | OBSERVATEURS. | PREMIÈRE APPROXIMATION. | | | DEUXIÈME APPROXIMATION. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DATES. | ANGLES de position. | DISTANCES. | GROSSISSEMENTS moyens. | NOMBRE de jours d'observations. | | ANGLE DE POSITION calculé — observé | | DISTANCE calc. — obs. | ANGLE DE POSITION calculé — observé | | DISTANCE calc. — obs. |
| | | | | | | dièdre. | en arc. | | dièdre. | en arc. | |
| | ° ′ | ″ | | | | ° ′ | ″ | ″ | ° ′ | ′ | ″ |
| 1832,27 | 196.43 | » | » | » | Dawes. | — 0.32 | — 0,016 | » | — 0.20 | — 0,010 | » |
| 32,41 | 195,56 | 1,750 | 600 | 5 | W. Struve. | — 0.37 | — 0,019 | — 0,011 | — 0.25 | — 0,013 | — 0,006 |
| 33,14 | 189.58 | » | » | » | J. Herschel. | + 0.53 | + 0,027 | » | + 1. 3 | + 0,032 | » |
| 33,23 | 189.50 | » | » | » | Dawes. | + 0.28 | + 0,014 | » | + 0.39 | + 0,020 | » |
| 33,84 | 188.25 | 1,762 | 1000 | 5 | W. Struve. | — 1.43 | — 0,054 | + 0,037 | — 1.34 | — 0,049 | + 0,036 |
| 35,41 | 180.11 | 1,764 | 920 | 5 | *id.* | — 2.12 | — 0,073 | + 0,119 | — 2.10 | — 0,071 | + 0,112 |
| 36,44 | 171,12 | 1,972 | 800 | 4 | *id* | + 1.31 | + 0,051 | — 0,025 | + 1.26 | + 0,048 | — 0,034 |
| 37,47 | 165.19 | 1,927 | » | 3 | *Voir* l'Addit. | + 2.28 | + 0,087 | + 0,089 | + 2.18 | + 0,080 | + 0,078 |
| 37,53 | 167.23 | » | » | » | Encke. | + 0. 7 | + 0,004 | » | — 0. 3 | — 0,002 | » |
| 38,43 | 160.23 | 2,260 | » | 9 | *Voir* l'Addit. | + 3. 6 | + 0,113 | — 0,176 | + 2.50 | + 0,102 | — 0,188 |
| 39,47 | 157.58 | » | » | » | Galle. | + 1.11 | + 0,045 | » | + 0.50 | + 0,031 | » |
| 40,25 | 152.14 | » | » | » | Kaiser. | + 3.51 | + 0,149 | » | + 3.26 | + 0,132 | » |
| 40,40 | 155.24 | 2,286 | 858 | 7 | W. et Ot. Str. | + 0. 7 | + 0,005 | — 0,055 | — 0.18 | — 0,012 | — 0,069 |
| 41,29 | 150.12 | » | » | » | Mädler. | + 2. 4 | + 0,083 | » | + 1.34 | + 0,062 | » |
| 41,402 | 152. 8 | 2,282 | 858 | 6 | Ot. Struve. | — 0.16 | — 0,011 | + 0,025 | — 0.47 | — 0,031 | + 0,0.2 |
| 42,40 | 148.47 | 2,410 | 858 | 4 | *id.* | — 0.20 | — 0,014 | — 0,027 | — 0.55 | — 0,038 | — 0,040 |
| 44,788 | 140.52 | 2,526 | 858 | 5 | *id.* | + 0.14 | + 0,010 | + 0,033 | — 0.29 | — 0,021 | + 0,022 |
| 46,365 | 138.49 | 2,620 | 858 | 4 | *id.* | — 2. 3 | — 0,096 | + 0,047 | — 2.51 | — 0,132 | + 0,038 |
| 47,407 | 131.50 | 2,700 | 858 | 3 | *id.* | + 2.15 | + 0,107 | + 0,034 | + 1.25 | + 0,067 | + 0,025 |
| 48,406 | 128.43 | 2,752 | 858 | 5 | *id.* | + 2.55 | + 0,142 | + 0,041 | + 2. 2 | + 0,099 | + 0,034 |

Ces deux systèmes d'éléments ne présentent pas de notables différences; cependant la correction des premiers a eu pour résultat d'atténuer sensiblement les écarts entre le calcul et l'observation. Dans la deuxième approximation, les plus forts écarts des distances sont relatifs à 1835 et 1838; le dernier atteint presque o″,2 : il est manifeste, d'après la comparaison des observations voisines, que la plus forte partie de ces erreurs doit être attribuée aux observations elles-mêmes. Les autres distances sont assez bien représentées. Quant aux angles de position, ils offrent des écarts de o″,10 à o″,13, qui sont au nombre de quatre seulement, et imputables en grande partie aux observations. En prenant la moyenne des écarts que laissent subsister les éléments corrigés, on trouve, tant pour les angles de position que pour les distances, le même nombre o″,046. Ce résultat montre le parti avantageux que l'on peut tirer des distances mesurées par MM. Struve. (Je n'ai point comparé les distances observées par d'autres astronomes, attendu qu'elles ne sont pas assez nombreuses pour qu'on en puisse déduire la valeur du demi-grand axe correspondante à chaque observateur.)

M. Struve estime que l'erreur probable d'une détermination fondée sur la moyenne de trois mesures, les distances étant peu différentes de celles consignées dans le tableau précédent, est de o″,05 pour les distances, et de o″,03 pour les angles de position. L'erreur moyenne ci-dessus, quoiqu'elle ne puisse être prise pour l'erreur probable, peut néanmoins lui être comparée; elle se trouve ici un peu plus faible que le premier des deux nombres précédents, et de moitié plus forte que le second. La concordance n'est pas tout à fait aussi satisfaisante relativement aux angles de position, que celle que j'ai obtenue dans mes recherches sur $\gamma$ de la Couronne. Les écarts relatifs à la deuxième approximation présentent des permanences de signe que la correction des éléments elliptiques ne peut faire disparaître. Quant à la cause, il ne saurait être question actuellement de la rechercher dans une action perturbatrice inconnue ou un phénomène d'aberration, puisque les observations suffisent à peine pour déterminer les constantes du mouvement elliptique.

# QUATRIÈME NOTE

SUR LES

# ÉTOILES DOUBLES,

Par M. YVON VILLARCEAU.

(Présentée à l'Académie des Sciences, le 29 octobre 1849.)

## *Du mouvement des étoiles doubles, considéré comme propre à fournir la preuve de l'universalité des lois de la gravitation planétaire.*

Les applications de la théorie du mouvement aux systèmes binaires ont toujours été basées, depuis Savary, sur l'hypothèse que les lois connues de la pesanteur s'étendent à ces systèmes éloignés du nôtre. En examinant les résultats obtenus par les astronomes qui se sont occupés des étoiles doubles, on reconnaît que, jusqu'ici, le mouvement observé s'est montré d'accord avec les lois de la gravitation planétaire. On en a conclu, et j'ai cru moi-même, avant d'avoir suffisamment examiné la question, qu'il en résultait la preuve de l'exactitude de l'hypothèse, ou de l'universalité des lois de la pesanteur. Je me propose d'examiner, dans cette Note, la validité de cette conclusion, quoique l'ombre d'un doute à cet égard puisse ressembler aujourd'hui à une hérésie scientifique. Je dois me hâter de dire que mon intention n'est point d'élever le moindre doute sur l'universalité des lois de la pesanteur; je n'en ai aucun: mais je pense que, lorsqu'il s'agit d'un fait capital, et qui intéresse à un haut degré la philosophie des sciences, il convient de distinguer une probabilité d'une preuve acquise. Afin d'éviter toute équivoque, j'indiquerai immédiatement le résultat de la discussion à laquelle je me suis livré; il peut être résumé dans la proposition suivante :

*Bien qu'il résulte des recherches des astronomes, que le mouvement observé dans les systèmes binaires ne se soit jusqu'ici montré nulle part en opposition avec les lois de la pesanteur, nous n'avons cependant pas encore le droit de conclure que cette loi régit effectivement les mouvements des étoiles doubles, comme elle régit les mouvements planétaires. — Les observations d'étoiles doubles ne peuvent pas fournir une preuve expérimentale de l'universalité des lois de la pesanteur, mais seulement de puissantes probabilités qui semblent commencer à se produire.*

Voici sur quoi je me fonde : Les étoiles dont je me suis occupé sont celles qui se prêtent le mieux à la détermination de tous les éléments de leurs orbites, fondée sur l'hypothèse de la loi de Newton. Malgré la précision et le nombre des observations dont on dispose actuellement, grâce aux travaux de MM. Struve, Herschel et autres astronomes, ces observations sont loin d'équivaloir à autant de données suffisamment distinctes. J'ai montré, dans chacun des cas, combien le problème reste indéterminé, lorsque l'on n'utilise que les observations modernes (angles et distances), et comment les anciennes observations sont nécessaires pour lever l'indétermination.

L'ensemble des observations pour chaque système binaire n'équivaut pas, d'après mes recherches, à plus de sept à huit données réellement distinctes (*). Or, on sait que sept données, comprenant une distance au moins, sont nécessaires pour déterminer tous les éléments, y compris le demi-grand axe, si l'on part de l'hypothèse que le mouvement est dû à l'action d'une force variable en raison inverse du carré de la distance. Considérons le nombre des données distinctes comme étant seulement égal à sept : quelle que soit la loi inconnue du mouvement, il sera généralement possible de calculer des éléments elliptiques qui satisfassent à ces données; et, dès lors, il n'y aura pas moyen de distinguer si le mouvement a plutôt lieu suivant la loi de Newton que suivant toute autre loi.

Pour conclure en faveur de la loi de Newton, il faudra *au moins* que les éléments elliptiques déterminés par sept données représentent, en les corrigeant s'il y a lieu, une huitième donnée distincte. On conçoit, d'ailleurs, qu'une neuvième donnée satisfaite ne serait pas superflue. Or, je le répète, les observations d'une même étoile double, que l'on possède aujourd'hui, équivalent *au plus* à huit données réellement distinctes.

Nous allons voir maintenant, en nous plaçant à un autre point de vue, qu'en *toute rigueur*, c'est-à-dire en se basant uniquement sur les observations, la condition qui vient d'être établie serait insuffisante, et même qu'un nombre illimité de données distinctes représentées par les lois de la pesanteur, ne suffiraient pas pour conclure en leur faveur.

En effet, rappelons les conséquences de la gravitation planétaire : 1° les

(*) La seule étoile double que l'on pourrait considérer comme présentant un nombre de données distinctes supérieur à huit, est ζ d'Hercule En réduisant ce nombre à huit, je regarde l'ensemble des distances mesurées comme n'équivalant qu'à une seule donnée, et ne pouvant servir, par conséquent, à déterminer que le grand axe. Je ne crois pas que la variation de ces distances doive être prise, ici, en considération, à cause des difficultés extrêmes qu'elles ont présentées à MM. Struve (*voir* le *Mensuræ micrometricæ*). Dans tous les autres cas, le nombre des données réellement distinctes n'excède pas le nombre huit ou l'atteint à peine.

aires décrites par les rayons vecteurs sont planes et proportionnelles aux temps; on sait que cette propriété est commune à tout mouvement dans lequel la direction de la force passe constamment par un centre fixe; 2° l'orbite décrite est une section conique; 3° le centre fixe occupe l'un des foyers de cette courbe. On ajoute, réciproquement, que, si le mouvement d'un corps présente ces trois caractères, la force qui le sollicite est en raison inverse du carré de sa distance au centre fixe.

Nous sommes conduits à examiner si les observations peuvent permettre de vérifier que ces trois conditions sont remplies. Quant à la première, il résulte de ce que l'on considère seulement deux corps, que l'orbite doit être plane; et l'on peut affirmer dès à présent, en se basant sur les observations de MM. Struve, que la loi des aires proportionnelles aux temps est satisfaite dans la limite des erreurs des observations. En second lieu, les orbites relatives des étoiles doubles sont-elles des sections coniques? Il suffit de considérer leurs projections ou les orbites apparentes. J'ai fait remarquer que les observations des étoiles les mieux connues équivalent tout au plus à huit données distinctes, auxquelles nous substituerons ici quatre positions complètes. On sait, d'ailleurs, que cinq points sont nécessaires pour déterminer une section conique. Pour affirmer qu'une courbe donnée appartient à cette espèce, il ne suffit pas que cinq de ses points coïncident avec une section conique, il faut qu'il y en ait au moins six. Or, je viens de rappeler que c'est à peine si l'on possède l'équivalent de quatre points; mais on conçoit très-bien que, le nombre des points distincts devant augmenter avec le temps, il sera possible de conclure des observations elles-mêmes, si effectivement l'orbite apparente est une section conique. Je vais supposer maintenant que les observations aient prononcé affirmativement à cet égard.

Il reste à vérifier si l'étoile centrale occupe l'un des foyers de l'orbite réelle. Nous ne connaissons pas directement cette orbite par les observations : si l'on en donne néanmoins les éléments, cela tient à ce que l'on admet à priori la loi inverse du carré des distances. Pour déduire des observations, sans aucune hypothèse, les éléments de l'orbite réelle, il faudrait que celles-ci nous en fournissent une autre projection; ce qui se réaliserait si le point d'où nous observons se trouvait transporté en un autre lieu de l'espace suffisamment éloigné de la direction primitive des rayons visuels. On arriverait au même résultat, mais avec moins de précision, si l'*inégalité de lumière* indiquée par Savary comme propre à fournir une limite maximum de la distance des étoiles doubles, devenait très-sensible. Il va sans dire que nous laissons de côté l'idée d'avoir recours aujourd'hui à de semblables moyens.

Concevons une surface cylindrique élevée sur le contour de l'orbite apparente, parallèlement à la direction des rayons visuels, et coupons cette surface

par un plan passant par l'étoile centrale, et ayant d'ailleurs une direction quelconque dans l'espace. Nous pouvons supposer que le satellite se meut dans la courbe qui résultera de l'intersection, de telle sorte que le mouvement projeté coïncide avec le mouvement observé. Il est clair que les aires projetées étant reconnues proportionnelles aux temps, d'après les observations, il en sera de même dans l'orbite hypothétique, et que, par suite, le satellite sera soumis à l'action d'une force centrale. La loi inconnue de cette force dépendra de la situation du plan sécant, et ne se confondra avec la loi de la raison inverse du carré de la distance, que si le plan sécant est dans la situation particulière qui donne lieu à une orbite dont un foyer coïncide avec l'étoile centrale. Or, tant que la position de l'orbite réelle ne sera pas connue directement, on ne pourra pas affirmer, en *toute rigueur,* que le mouvement ait lieu plutôt en vertu de la loi ordinaire de la pesanteur, correspondante à la coïncidence d'un foyer et de l'étoile centrale, qu'en vertu de la loi différente qui répond à la position arbitraire donnée au plan sécant. *La discussion de cette dernière loi et sa comparaison avec la loi képlérienne, pourront seules établir une puissante probabilité en faveur de celle-ci.*

En recherchant la loi du mouvement sous l'action d'une force centrale, dans une section conique dont le foyer ne coïncide pas avec le centre des forces, je trouve une expression générale de la force, dans laquelle l'intensité varie avec la distance et la direction; le facteur qui dépend de la direction seulement, y conserve la même valeur pour des directions opposées. Puisque la direction est une fonction de la distance, en vertu de l'équation de l'orbite, la force pourrait être considérée comme une fonction de la seule distance; mais ici, à une grandeur donnée du rayon vecteur, répondent généralement quatre directions, de sorte que l'élimination de la direction donnerait quatre valeurs distinctes de l'intensité de la force en fonction de la distance.

Une telle loi, dans laquelle l'intensité varierait, à distances égales et pour des directions différentes, est tout à fait improbable. La position arbitraire du plan sécant introduirait d'ailleurs, dans son expression, deux constantes entièrement indéterminées; tandis qu'au contraire, l'hypothèse de la loi de la pesanteur détermine la situation du plan de l'orbite, à l'ambiguïté près que l'on connaît. *Il deviendrait donc extrêmement probable que la loi connue de la pesanteur régit aussi le mouvement des étoiles doubles.*

Indiquons deux cas particuliers que présente l'expression générale de la force dont il vient d'être question. Le premier est celui d'une force nulle et d'une trajectoire rectiligne ne passant pas nécessairement par l'étoile centrale : on sait que, dans ce cas, les aires sont en effet proportionnelles aux temps, et le mouvement uniforme. L'autre est celui d'une force proportion-

nelle à la distance, la trajectoire étant une section conique dont l'étoile centrale occupe le centre de figure. (Cette circonstance se présente dans plusieurs phénomènes moléculaires.) L'étoile centrale occuperait donc à la fois le centre de l'orbite réelle et celui de l'orbite apparente, et la position du plan resterait indéterminée; tandis que si l'on admet la loi inverse du carré de la distance, il faudra que l'étoile centrale occupe en même temps le centre de figure et l'un des foyers de l'orbite réelle, ou que la trajectoire soit circulaire: cette conséquence suffit pour déterminer la position du plan, sous les mêmes restrictions que plus haut. L'indétermination que nous venons de mentionner, et le petit nombre de cas où l'étoile centrale occupera le centre de l'orbite apparente, s'il s'en présente jamais, conduisent à admettre de préférence la loi de la pesanteur.

Du rapprochement de ces diverses considérations, il résulte qu'une condition indispensable pour établir l'universalité des lois de la pesanteur, est la possibilité de satisfaire, au moyen de cette loi, à un nombre de données distinctes égal à huit *au moins*. On voit donc, comme je l'ai dit tout d'abord, que la preuve n'est point encore faite, et qu'elle semble, dès l'époque actuelle, commencer à se produire.

Quant au caractère de cette preuve, il importe de remarquer que, si l'on est conduit, dans le problème des étoiles doubles, à choisir entre les diverses lois de la force attractive qui pourraient produire le mouvement observé, la loi de Newton de préférence à toute autre, c'est uniquement par la tendance de notre esprit à mettre de l'harmonie dans nos conceptions des causes auxquelles nous attribuons les phénomènes de la nature, et non par la nécessité de faire concorder ces lois avec les faits observés.

Ainsi, la preuve de la loi de Newton dans notre système solaire et la preuve de l'universalité de cette loi, sont de natures essentiellement différentes. La première résulte de l'observation, sans qu'il soit nécessaire d'invoquer autre chose que les principes de la mécanique; la seconde ne peut nous être fournie directement par l'observation, et nous en sommes réduits à recourir aux probabilités pour l'établir. Les probabilités en faveur de l'universalité de la loi de Newton, fournies par le mouvement des étoiles doubles, pourront être immenses à la vérité; mais elles ne constitueront point une preuve offrant le caractère de certitude expérimentale que revêt la loi de Newton elle-même dans notre système planétaire.

Je ne terminerai pas cette Note, sans rendre un nouvel hommage à la persévérance et à l'habileté de MM. Struve: leurs immenses travaux, continués pendant quelques années encore, offriront une base solide à la démonstration aussi complète que possible, de l'universalité des lois de la gravitation. Espérons, d'ailleurs, que les astronomes qui sont munis de puissants instru-

ments, s'occuperont aussi d'obtenir des positions très-précises des étoiles centrales, afin que l'on en puisse déduire les rapports des masses des étoiles composantes. Il ne restera plus à connaître que les parallaxes, pour avoir les masses elles-mêmes. La détermination du rapport des masses et celle des éléments des orbites relatives, deviennent aujourd'hui indispensables pour fixer avec exactitude, dans les Éphémérides, les positions des étoiles fondamentales qui appartiennent à des systèmes binaires.

## *Détermination de l'intensité des forces centrales, dans une section conique dont les foyers ne coïncident pas avec le centre des forces.*

Ayant montré, dans ce qui précède, que la discussion de la loi de telles forces centrales, comparée à la loi de la raison inverse du carré de la distance, peut seule établir une puissante probabilité en faveur de cette dernière, il devient indispensable de présenter la détermination analytique de l'intensité de ces forces.

Considérons donc le mouvement d'un satellite dans une orbite que nous supposerons elliptique, pour plus de simplicité dans la discussion. En prenant pour origine des coordonnées rectangulaires, le lieu même de l'étoile centrale, et excluant le cas impossible où l'orbite passerait par cette étoile, on pourra donner à l'équation de l'orbite elliptique, la forme

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex - 1 = 0. \tag{0}$$

Dans cette circonstance, $a$ et $c$ sont nécessairement positifs, et si l'on pose

$$p^2 = 4ac - b^2, \tag{1}$$

on a la condition

$$p^2 > 0.$$

Soit

$$F = ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex - 1; \tag{2}$$

l'équation de l'orbite s'écrira

$$F = 0. \tag{3}$$

Les forces dont il s'agit étant des forces centrales, soit $2k$ le double de l'aire décrite par le rayon vecteur pendant l'unité de temps; $2k$ sera une constante, et l'on aura

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = 2k. \tag{4}$$

Soit $\varphi$ l'intensité inconnue de la force centrale rapportée à l'unité de masse;

les équations différentielles du mouvement seront

$$(5) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi\frac{y}{r},$$

$r$ désignant le rayon vecteur. Nous devons encore avoir égard aux équations différentielles du premier et du deuxième ordre de la trajectoire :

$$(6) \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{dy}{dt} = 0;$$

$$(7) \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\frac{dx^2}{dt^2} + 2\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}\frac{dy^2}{dt^2} = 0.$$

Les équations (4), (5), (6) et (7) sont au nombre de cinq; elles permettent, par conséquent, d'éliminer les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$. La réduite sera donc une relation entre la force $\varphi$, les coordonnées et le rayon vecteur $r$. Si l'on suppose que l'on joigne à cette réduite l'équation (3) et la suivante

$$(8) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

on concevra la possibilité d'éliminer $x$ et $y$ entre ces trois équations, et d'obtenir $\varphi$ en fonction de $r$. Nous n'avons pas besoin d'aller jusque-là.

Les valeurs (5) étant transportées dans l'équation (7), en élimineront immédiatement $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$.

Quant aux dérivées du premier ordre, multiplions les équations (4) et (6), l'une par $\frac{d\mathrm{F}}{dy}$, l'autre par $x$, et ajoutons membre à membre; d'autre part, multiplions les mêmes équations respectivement par $\frac{d\mathrm{F}}{dx}$ et $y$, puis retranchons; posons ensuite

$$(9) \qquad \mathrm{U}_1 = x\frac{d\mathrm{F}}{dx} + y\frac{d\mathrm{F}}{dy},$$

il viendra

$$(10) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2k}{\mathrm{U}_1}\frac{d\mathrm{F}}{dy}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2k}{\mathrm{U}_1}\frac{d\mathrm{F}}{dx}.$$

En substituant les valeurs (5) et (10) dans l'équation (7), on obtient

$$-\frac{\varphi}{r}\left(x\frac{d\mathrm{F}}{dx} + y\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right) + \frac{4k^2}{\mathrm{U}_1^2}\left(\frac{d\mathrm{F}^2}{dx^2}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2} - 2\frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy} + \frac{d\mathrm{F}^2}{dy^2}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\right) = 0.$$

Désignons par 2C la valeur de la parenthèse du deuxième terme de cette équation; nous en déduirons, en ayant égard à la relation (9),

$$\varphi = 8C\frac{k^2 r}{U_1^3}. \tag{11}$$

Nous allons former les dérivées partielles de F, et ensuite la valeur de C. Il viendra d'abord

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = by + 2cx + e, & \dfrac{d^2F}{dx^2} = 2c, \\ \dfrac{dF}{dy} = bx + 2ay + d, & \dfrac{d^2F}{dx\,dy} = b, \\ & \dfrac{d^2F}{dy^2} = 2a. \end{cases} \tag{12}$$

La substitution des valeurs des dérivées du deuxième ordre, dans la fonction que nous avons désignée par 2C, donne

$$C = a\frac{dF^2}{dx^2} - b\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy} + c\frac{dF^2}{dy^2}.$$

Effectuant les carrés et produits de dérivées qui sont indiqués ici, puis multipliant par $a$, $-b$, $c$, et ajoutant, il viendra, en vertu de l'équation (1), toutes réductions faites,

$$C = p^2(ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex) + ae^2 - bed + cd^2.$$

Mais, à cause de l'équation (0), la parenthèse du premier terme du deuxième membre se réduit à l'unité; il vient donc

$$C = ae^2 - bed + cd^2 + p^2. \tag{13}$$

Ainsi, la quantité C est une constante.

On peut donner une autre forme à la valeur de cette constante; en effet, S désignant l'aire totale de l'ellipse, et $\pi$ le rapport de la circonférence au diamètre, on a

$$\frac{S}{2\pi} = \frac{1}{p^3}(ae^2 - bed + cd^2 + p^2); \tag{14}$$

il s'ensuit

$$C = \frac{S}{2\pi}p^3. \tag{15}$$

Soient encore: T la durée de la révolution; N le moyen mouvement; A le demi-grand axe; B le demi-petit axe; Π le demi-paramètre; E l'excentricité;

on aura

$$k^2 = \frac{S^2}{T^2} = \frac{S^2 N^2}{4\pi^2},$$

et l'expression (11) deviendra d'abord

$$\varphi = \frac{r}{U_1^3}\left(\frac{Sp}{\pi}\right)^3 N^2.$$

D'autre part, on a aussi

$$\frac{S}{\pi} = AB;$$

il en résulte finalement

$$\varphi = A^3 N^2 \left(\frac{Bp}{U_1}\right)^3 r. \tag{16}$$

Occupons-nous actuellement de $U_1$; nous aurons, au moyen des valeurs (12),

$$U_1 = 2(ay^2 + bxy + cx^2) + dy + ex. \tag{17}$$

L'équation (o) permet de substituer à cette expression les deux suivantes :

$$U_1 = 2 - (dy + ex), \tag{18}$$

$$U_1 = 1 + ay^2 + bxy + cx^2. \tag{19}$$

Telles sont les expressions les plus simples de $U_1$, en fonction des coordonnées $x$ et $y$.

Nous allons transformer la valeur (18), de manière à rendre la relation (16) aisément comparable à celle que fournit la loi ordinaire de la pesanteur. A cet effet, substituons les coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires, de sorte qu'en désignant par $v$ la longitude dans l'orbite, on ait

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v. \tag{20}$$

L'équation (18) donnera

$$U_1 = 2 - r(d\sin v + e\cos v); \tag{21}$$

et, si l'on pose ensuite

$$U' = \frac{U_1}{r}, \tag{22}$$

l'expression (16) se changera en

$$\varphi = \frac{A^3 N^2}{r^2}\left(\frac{Bp}{U'}\right)^3. \tag{23}$$

Sous cette forme, on voit que la condition pour que la loi de la force soit celle de la raison inverse du carré de la distance, est $U' = const.$, ou, en

vertu de (22), $U_1 = k' r$, $k'$ désignant une constante; mais l'équation (21) donne alors

$$r(k' + d\sin v + e\cos v) = 2,$$

et peut se mettre sous la forme

$$r = \frac{\frac{2}{k'}}{1 + \frac{q}{k'}\cos(v - \beta)}, \tag{24}$$

en posant

$$q\sin\beta = d,$$
$$q\cos\beta = e.$$

Or, l'équation (24) est celle d'une section conique dont l'un des foyers est au pôle même.

Sans nous arrêter davantage à ce résultat, nous nous proposerons d'exprimer le dénominateur U' de l'expression (23) en une fonction de $v$ seulement. Pour cela, transformons d'abord l'équation (o); et soient, à cet effet,

$$\begin{cases} h = a\sin^2 v + b\sin v\cos v + c\cos^2 v, \\ 2h' = d\sin v + e\cos v; \end{cases} \tag{25}$$

il viendra, en vertu de ces équations et des équations (20),

$$h r^2 + 2h' r - 1 = 0. \tag{26}$$

On démontre aisément que l'hypothèse $p^2 > 0$ entraîne pour conséquence $h > 0$, quel que soit $v$; il s'ensuit que les deux racines de l'équation (26) sont de signes contraires, et que la racine positive, la seule qui soit à considérer, a pour valeur

$$r = \frac{\sqrt{h'^2 + h} - h'}{h}. \tag{27}$$

Substituant cette valeur et la deuxième (25) dans l'équation (21), il viendra

$$U_1 = 2\left(1 - \frac{h'}{h}\sqrt{h'^2 + h} + \frac{h'^2}{h}\right),$$

ou bien, en réduisant au même dénominateur,

$$U_1 = 2\sqrt{h'^2 + h}\left(\frac{\sqrt{h'^2 + h} - h'}{h}\right);$$

puis, à cause de l'équation (27),

$$U_1 = 2\sqrt{h'^2 + h}\,.\,r.$$

Il en résulte, en vertu de l'équation (22),

$$U' = \sqrt{4h + 4h'^2}. \tag{28}$$

Au moyen des valeurs (25) de $h$ et de $2h'$, cette expression devient

$$U' = \sqrt{(4a + d^2)\sin^2 v + 2(2b + de)\sin v \cos v + (4c + e^2)\cos^2 v};$$

mais, à cause de

$$\sin^2 v = \frac{1 - \cos 2v}{2}, \quad 2\sin v \cos v = \sin 2v, \quad \cos^2 v = \frac{1 + \cos 2v}{2},$$

et, si l'on pose, d'ailleurs,

$$\begin{cases} P = 2(a + c) + \frac{1}{2}(d^2 + e^2), \\ Q' = 2(a - c) + \frac{1}{2}(d^2 - e^2), \\ Q'' = 2b + de, \end{cases} \tag{29}$$

il vient

$$U' = \sqrt{P - Q'\cos 2v + Q''\sin 2v}.$$

Nous pouvons poser encore

$$\begin{cases} Q' = Q\sin 2\psi, \\ Q'' = Q\cos 2\psi; \end{cases} \tag{30}$$

d'où

$$\begin{cases} \operatorname{tang} 2\psi = \dfrac{Q'}{Q''}, \\ Q = \sqrt{Q'^2 + Q''^2} = \dfrac{Q'}{\sin 2\psi} = \dfrac{Q''}{\cos 2\psi}; \end{cases} \tag{31}$$

en admettant ici que l'on prenne $2\psi$ de manière que son sinus ait le signe de $Q'$ : il en résulte

$$U' = \sqrt{P + Q\sin 2(v - \psi)}.$$

On peut aussi écrire

$$U' = \sqrt{P}\sqrt{1 + \frac{Q}{P}\sin 2(v - \psi)}. \tag{32}$$

Cette valeur étant mise dans l'équation (23), celle-ci devient

$$\varphi = \frac{A^3 N^3}{r^2}\left(\frac{Bp}{\sqrt{P}}\right)^3 \left[1 + \frac{Q}{P}\sin 2(v - \psi)\right]^{-\frac{3}{2}}. \tag{33}$$

Sous cette forme, on voit que celui des facteurs qui dépend seulement de la direction du rayon vecteur conserve la même valeur dans les directions opposées. Il est également facile de voir que, si l'on cherche à exprimer $v$ en $r$, au moyen des équations (25) et (26) ou de l'équation polaire de l'orbite, on aura généralement quatre valeurs de $v$ pour chaque valeur de $r$; de sorte que l'intensité $\varphi$ de la force centrale prendra généralement quatre valeurs distinctes pour une même distance, ainsi qu'il a été dit dans la première partie de cette Note.

Examinons maintenant ce que devient l'expression (33) lorsque l'origine des coordonnées est un foyer de la courbe Nous pourrions, en vue de simplifier, supposer $b = 0$, attendu que la direction des axes peut toujours être prise telle que cette condition soit remplie; mais nous laisserons à $b$ une valeur quelconque, et nous allons établir les relations entre les coefficients, qui expriment que l'origine des coordonnées est un foyer.

On démontre aisément que l'équation d'une section conique dont le périhélie coïncide avec l'axe des $x$, l'origine étant au foyer, est de la forme

$$\mathrm{L}x^2 + \mathrm{L}'x + \mathrm{M}y^2 = 1. \tag{34}$$

Les coefficients se trouvent, en outre, assujettis à la relation

$$\frac{\mathrm{M} - \mathrm{L}}{\mathrm{L}'^2} = \frac{1}{4}, \tag{35}$$

et ils ont, avec les éléments, les relations suivantes :

$$\mathrm{L} = \frac{1}{\mathrm{A}\,\Pi}, \quad \mathrm{L}' = 2\frac{\mathrm{E}}{\Pi}, \quad \mathrm{M} = \frac{1}{\Pi^2}. \tag{36}$$

Pour déduire de l'équation (34) une autre équation qui satisfasse aux mêmes conditions, quelle que soit la direction du grand axe, il suffit d'avoir recours à la transformation des coordonnées, en posant

$$x = x\cos\beta - y\sin\beta,$$
$$y = x\sin\beta + y\cos\beta;$$

$\beta$ désigne ici l'angle du nouvel axe des $x$ compté de la direction du périhélie, de sorte que $-\beta$ soit l'angle du périhélie compté du nouvel axe des $x$.

L'équation (34), ainsi transformée, sera

$$\begin{array}{l|l|l|l} \mathrm{M}\cos^2\beta & y^2 + 2\mathrm{M}\sin\beta\cos\beta & xy + \mathrm{M}\sin^2\beta & x^2 - \mathrm{L}'\sin\beta.y + \mathrm{L}'\cos\beta.x = 1. \\ + \mathrm{L}\sin^2\beta & - 2\mathrm{L}\sin\beta\cos\beta & + \mathrm{L}\cos^2\beta & \end{array}$$

Pour identifier cette équation avec la proposée (o), il suffit de poser

$$(37)\qquad \begin{cases} M\cos^2\beta + L\sin^2\beta = a, \\ M\sin^2\beta + L\cos^2\beta = c, \\ 2(M-L)\sin\beta\cos\beta = b, \\ -L'\sin\beta = d, \\ L'\cos\beta = e. \end{cases}$$

En appliquant les formules

$$\sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\beta}{2}, \quad \cos^2\beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2},$$

les deux premières des équations (37) se changent en

$$\frac{1}{2}(M+L) + \frac{1}{2}(M-L)\cos 2\beta = a,$$

$$\frac{1}{2}(M+L) - \frac{1}{2}(M-L)\cos 2\beta = c.$$

Celles-ci, jointes à la troisième équation (37), donnent

$$(38)\qquad \begin{cases} M+L = a+c, \\ (M-L)\cos 2\beta = a-c, \\ (M-L)\sin 2\beta = b. \end{cases}$$

Les deux dernières équations (37) donnent, en outre,

$$(39)\qquad \begin{cases} L'^2 = d^2 + e^2, \\ L'^2\cos 2\beta = -(d^2 - e^2), \\ L'^2\sin 2\beta = -2ed. \end{cases}$$

Ces trois équations n'équivalent qu'à deux distinctes, de sorte que les équations (38) et (39) n'équivalent qu'à cinq. En éliminant $2\beta$ entre ces équations, on a immédiatement les quatre suivantes :

$$(40)\qquad \begin{cases} M+L = a+c, & L'^2 = d^2+e^2, \\ \dfrac{M-L}{L'^2} = -\dfrac{a-c}{d^2-e^2}, & \dfrac{M-L}{L'^2} = -\dfrac{b}{2ed}. \end{cases}$$

Les deux premières de ces équations donnent les valeurs de $M+L$ et $L'^2$ en fonctions des coefficients $a$, $c$, $d$, $e$: les deux autres établissent une équation de condition entre les données, par l'élimination de $\frac{M-L}{L'^2}$; cette équation étant jointe à la condition (35), on en conclut que les conditions,

pour qu'une équation du deuxième degré représente une section conique dont un foyer coïncide avec l'origine des coordonnées, sont exprimées par les équations suivantes au nombre de deux :

$$\frac{a-c}{d^2-e^2}=\frac{b}{2ed}=-\frac{1}{4}. \tag{41}$$

Introduisons ces relations (41) ou (35) dans les expressions de P, $p$, Q' et Q''. Il vient, par les équations (29) et (40),

$$P=2\left(M+L+\frac{1}{4}L'^2\right),$$

ou, en vertu de l'équation (35),

$$P=4M,$$

puis, à cause des équations (36),

$$P=\frac{4}{\Pi^2}, \tag{42}$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{P}}=\frac{\Pi}{2}. \tag{43}$$

D'un autre côté, les équations (38) donnent

$$\begin{cases}(M+L)^2=(a+c)^2,\\ (M-L)^2=(a-c)^2+b^2.\end{cases} \tag{44}$$

Retranchant membre à membre, il vient

$$4ML=4ac-b^2=p^2, \tag{45}$$

et ensuite, en vertu des équations (36),

$$p^2=\frac{4}{A\Pi^3};$$

on en déduit

$$Bp=2\frac{B}{\sqrt{A}\,\Pi^{\frac{3}{2}}},$$

puis

$$\frac{Bp}{\sqrt{P}}=\frac{B}{\sqrt{A\Pi}}=1. \tag{46}$$

Enfin, les relations (41) donnent

$$a - c + \frac{1}{4}(d^2 - e^2) = 0,$$

$$b + \frac{1}{2}de = 0,$$

d'où, en vertu des équations (29) et (31),

$$Q' = 0, \quad Q'' = 0, \quad Q = 0.$$

Ces valeurs, jointes à l'équation (46), réduisent l'expression (33) à

$$\varphi = \frac{A^2N^2}{r^2}, \tag{47}$$

c'est-à-dire à l'expression connue de la gravitation.

Il nous reste à examiner les cas particuliers où la fonction $U_1$ devient constante. Les expressions (18) et (19) donnent les deux solutions suivantes :

$$dy + ex = \text{const.},$$
$$ay^2 + bxy + cx^2 = \text{const.}$$

Ces relations entre les coordonnées sont les équations des trajectoires. La première est celle d'une ligne droite qui ne passe pas nécessairement par l'origine; or, on a dans ce cas,

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0 :$$

il en résulte

$$p = 0 \quad \text{et} \quad C = 0,$$

en vertu des équations (1) et (13); et la valeur de $\varphi$, donnée par l'équation (11), reste constamment nulle, à moins que $U_1$ ne s'annule en même temps. Cela doit être, puisqu'un mobile ne peut décrire une ligne droite, qu'autant que la force qui le sollicite agit dans la direction du mouvement ou reste nulle. Dans ce cas, d'ailleurs, les aires décrites par les rayons vecteurs sont toujours proportionnelles aux temps. La deuxième équation est celle d'une section conique dont le centre de figure coïncide avec l'origine des coordonnées ou le centre des forces. De la relation $U_1 = \text{const.}$ et de l'équation (11), on tire

$$\varphi = r.\text{const.}$$

Les forces se trouvent alors proportionnelles aux distances. On sait qu'effectivement cette loi, qui s'observe dans certains phénomènes moléculaires, donne lieu au mouvement dans une section conique dont le centre de figure coïncide avec le centre des forces.

# MÉTHODE

## *Pour calculer les éléments des planètes, ou, plus généralement, des astres dont les orbites sont peu inclinées à l'écliptique, fondée sur l'emploi des dérivées relatives au temps, des trois premiers ordres de la longitude géocentrique et du premier ordre de la latitude;*

**Par M. YVON VILLARCEAU.**

(Présentée à l'Académie des Sciences, le 30 juillet 1849.)

1. Le grand nombre des petites planètes découvertes dans ces derniers temps m'a fourni l'occasion de comparer diverses méthodes employées pour calculer les orbites des corps célestes, et de reconnaître, dans leur théorie, l'existence d'une lacune qui restait à remplir.

On peut classer ces méthodes de diverses manières, suivant le point de vue où l'on se place : par exemple, on distinguera celles qui n'admettent que le nombre d'observations strictement nécessaire à la détermination des inconnues, et celles qui, au contraire, admettent un nombre d'observations quelconque supérieur au précédent. Parmi les premières, on remarquera la célèbre méthode de Gauss, et celle d'Olbers, pour les comètes. Parmi les secondes, on devra distinguer celles dont l'objet est de fournir seulement une première approximation, puis les méthodes de correction des éléments approchés. Je citerai, comme méthode servant à obtenir une première approximation, celle de Laplace (*), et celle qu'a donnée M. Cauchy (**), dans les *Comptes rendus*, tome XXV, page 401.

L'étroite connexité de ces deux dernières méthodes ne permet cependant

(*) Avec un peu d'attention, on reconnaît que les formules de la *Mécanique céleste* ne diffèrent que par la forme, de celles qui se trouvent dans la note (1), section VII, ajoutée à la dernière édition de la *Mécanique analytique*.

(**) Ayant l'occasion de discuter, dans ce Mémoire, la méthode de Laplace et l'une des méthodes de M. Cauchy, je désire qu'il soit bien entendu tout d'abord que le caractère d'indétermination qui leur est propre à toutes deux, dans le cas des petites planètes, ne s'étend point à une autre méthode du savant académicien, exposée *Comptes rendus*, tome XXV, pages 775 et 879.

Je suis conduit à discuter seulement les procédés dans lesquels on fait usage des dé-

pas de les confondre entièrement. En effet, Laplace ne considérait sa méthode que comme propre à donner un premier degré d'approximation; il était si loin de penser qu'elle pût fournir des résultats plus précis, qu'il a cru nécessaire d'en faire suivre l'exposé, d'un procédé pour la correction des éléments, qui n'a absolument rien de commun avec elle, et constitue dès lors une méthode de correction entièrement indépendante de la précédente. Il faut attribuer l'insuccès de la méthode de Laplace pour obtenir des résultats plus approchés, à l'emploi qu'il indique de sa formule d'interpolation, pour calculer les dérivées de la longitude et de la latitude géocentriques, sur lesquelles repose sa méthode. Il est aisé de reconnaître, en effet, que cette formule, qui reproduit exactement les données de l'observation, si elle contient un nombre suffisant de termes, donne néanmoins des valeurs inexactes des dérivées cherchées, et d'autant plus inexactes que les observations sont plus rapprochées dans le voisinage de l'époque pour laquelle on calcule les dérivées.

Pour éviter cet inconvénient, j'avais eu recours plusieurs fois à l'application de la méthode des moindres carrés, dans le développement de la longitude et de la latitude géocentriques suivant les puissances du temps, en limitant ce développement à un certain nombre de termes dépendant de l'intervalle de temps embrassé par les observations, et que l'expérience m'avait permis de fixer suivant les cas, mais non sans qu'il restât cependant quelque incertitude dans mon esprit sur ce nombre de termes. Mon objet étant de me procurer un premier degré d'approximation que je corrigeais ensuite par des méthodes particulières, je n'avais pas lieu, quant à la pratique, de m'arrêter à cette difficulté.

Les formules d'interpolation que M. Cauchy a publiées dans le Journal de M. Liouville, et reproduites dans son Mémoire sur la détermination des orbites des planètes, sont de nature à éclairer sur le nombre de termes qu'il est convenable de comprendre dans les développements en question. Elles

---

rivées des divers ordres de la longitude et de la latitude géocentriques, déduites d'un grand nombre d'observations, et calculées pour une époque unique.

La dernière méthode citée de M. Cauchy résout le problème de la détermination des orbites peu inclinées, en exigeant l'emploi des dérivées du premier ordre seulement, mais calculées pour deux époques différentes. Elle fournit, par ce moyen, les valeurs approchées des distances à la Terre et au Soleil, et, par suite, les valeurs approchées des éléments que l'on corrige ensuite au moyen de quatre observations.

On voit que mes conclusions ne peuvent s'appliquer à ce travail, qui se trouve tout à fait en dehors de la discussion; mes remarques portant, je le répète, sur les procédés destinés à fournir des éléments aussi approchés qu'on peut l'espérer en négligeant les perturbations, et fondés sur l'emploi des valeurs, à un instant donné, des dérivées des divers ordres obtenues par le concours d'un grand nombre d'observations.

permettent même, étant appliquées avec discernement, d'obtenir de l'emploi de la méthode de Laplace ou de celle de M. Cauchy, un degré d'exactitude que l'on n'aurait osé espérer sans le secours de ces formules; aussi M. Cauchy annonce-t-il, dans son Mémoire, qu'il fournit *un moyen facile de fixer, avec une grande précision, les éléments des orbites des petites planètes récemment découvertes.* Je dois ajouter, d'ailleurs, que c'est sur l'emploi des formules d'interpolation de M. Cauchy, que je fonde actuellement le succès des applications de la méthode que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Pour terminer l'énumération des méthodes qui admettent un nombre d'observations supérieur à celui strictement nécessaire, nous citerons les méthodes de correction fondées sur l'expression des variations des coordonnées géocentriques en fonction des variations de tous les éléments, et particulièrement celle de M. Le Verrier, qui remplace les éléments et leurs variations par trois positions géocentriques et leurs variations. Diverses méthodes, du genre de celle qui a été présentée une autre fois à l'Académie et jugée digne de l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*, et un procédé dont j'ai eu plusieurs fois l'occasion de faire mention, font dépendre les variations d'une partie des éléments, de celles de tous les autres.

2. Les méthodes citées qui n'admettent que le nombre de données strictement nécessaire, ne laissent rien à désirer quant à la rigueur mathématique, et l'on ne peut qu'admirer l'élégance des combinaisons analytiques dont elles font usage. Les autres méthodes ne sont pas toutes aussi rigoureuses; mais le grand avantage qu'elles présentent, d'ailleurs, de pouvoir faire concourir au résultat un grand nombre d'observations, est tellement considérable au point de vue pratique, qu'on ne saurait trop s'attacher à perfectionner ces méthodes, auxquelles la découverte de nombreuses petites planètes peut donner un certain degré d'importance. Je dis qu'il y a intérêt à baser une orbite sur plus de trois ou quatre observations isolées : cette proposition, qui semblerait ne plus être aussi rigoureuse, depuis que l'on a établi dans les observatoires, des instruments astronomiques d'une grande précision, et lorsqu'il s'agit de planètes au lieu de comètes, mérite néanmoins d'être prise en considération dans l'état actuel des choses. En effet, les observations méridiennes des nouvelles petites planètes, faites dans divers observatoires avec les instruments précis dont nous venons de parler, sont loin de présenter le même degré de concordance que les observations d'étoiles ou de planètes, telles que Uranus, Neptune, Cérès, Pallas et Vesta, qui sont beaucoup plus brillantes. L'insuffisance des instruments méridiens actuels, pour l'observation de ces astres, a été tellement sentie, qu'on s'est décidé, à Greenwich, à en installer un nouveau d'une puissance beaucoup plus

considérable. D'un autre côté, les observations extra-méridiennes faites à l'équatorial exigent, pour leur réduction, la connaissance des positions des étoiles de comparaison, positions dont le plus grand nombre, déduites des catalogues, sont affectées d'un certain degré d'incertitude; cette incertitude n'est levée que par les observations méridiennes des mêmes étoiles, faites souvent six ou huit mois après les comparaisons. Lors donc qu'on ne veut pas attendre un si long espace de temps, pour obtenir les éléments de l'orbite d'une planète nouvelle, on est réduit à employer des observations dont le caractère d'incertitude oblige à en faire concourir un nombre plus grand que le nombre strictement nécessaire.

Cependant on peut dire que la formation des observations dites *normales* permet de n'appliquer les calculs qu'à trois ou quatre observations, suivant les cas; mais il faut reconnaître que ces positions résultent de la comparaison des observations avec les positions tirées d'une éphéméride, ce qui suppose que l'on est déjà en possession d'une première orbite approchée. Or le calcul d'une première orbite, basé sur le nombre d'observations théoriquement suffisant, peut conduire à des résultats fort éloignés de la vérité, attendu que, dans ce cas, les erreurs des observations ont une influence très-grande, et d'autant plus grande que ces observations sont plus voisines.

Il y a donc intérêt à faire usage du plus grand nombre possible d'observations, afin que les erreurs s'atténuent mutuellement. D'ailleurs, il n'existe alors aucun moyen de contrôle qui puisse décider le choix des trois ou quatre observations à employer, si les erreurs sont peu considérables, comme cela arrive le plus ordinairement.

Enfin, ajoutons que la perfection des résultats fournis par les méthodes fondées sur l'emploi des dérivées des coordonnées géocentriques, peut être amenée à ne plus dépendre sensiblement que des formules d'interpolation dont on fera usage pour obtenir les valeurs de ces dérivées. Nous supposons ici les observations assez nombreuses, pour qu'il s'établisse une sorte de compensation des erreurs.

3. La méthode qui fait l'objet du présent Mémoire est fondée, comme celles de Laplace et de M. Cauchy, sur l'emploi des dérivées par rapport au temps, des longitudes et latitudes géocentriques; elle vient, ainsi que nous l'avons dit en commençant, combler une lacune dans la théorie du mouvement des corps célestes.

En se reportant aux formules données par Laplace pour la détermination des orbites des comètes, on reconnaît que tous les résultats dépendent d'une certaine fonction $\mu'$ de la latitude géocentrique et de ses dérivées des deux premiers ordres; cette fonction se présente sous la forme d'une fraction dont

tous les termes du numérateur et du dénominateur sont affectés de l'un au moins des facteurs suivants : $\sin\theta$, $\operatorname{tang}\theta$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ($\theta$ désignant la latitude géocentrique). Or, quand l'inclinaison est très-petite, comme cela a lieu généralement dans le cas des planètes, ces différents facteurs sont très-petits, et la fonction $\mu'$ est mal déterminée; elle deviendrait absolument indéterminée, si l'inclinaison était nulle, car tous ces facteurs s'annuleraient simultanément. Il n'y a point à rechercher si l'indétermination n'est qu'apparente, s'il n'existe pas quelque facteur commun : en effet, les quantités $\theta$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ sont indépendantes l'une de l'autre; elles peuvent être considérées comme étant trois des six arbitraires du problème. D'un autre côté, il est aisé de reconnaître que, dans le cas des inclinaisons nulles, il n'y a pas possibilité de déduire les éléments de l'orbite, d'une longitude et d'une latitude géocentrique et de leurs dérivées du premier et du deuxième ordre. On sait que, dans cette circonstance, deux des six éléments disparaissent; ce sont l'inclinaison et la longitude du nœud : il reste alors quatre éléments à déterminer, ce qui exige le concours de quatre longitudes, ou bien d'une longitude et de ses dérivées des trois premiers ordres. Les formules de Laplace tombent donc en défaut, dans le cas des faibles inclinaisons. (L'application de ces formules à la planète Iris ne peut donner une approximation, même grossière, qu'avec des précautions très-minutieuses.)

Si l'on examine actuellement les expressions auxquelles a été conduit M. Cauchy, on verra que la quantité qu'il désigne par CR, troisième équation (11), *Comptes rendus*, tome XXV, page 410, est identique avec la fonction $\mu'$ de Laplace; pour s'en assurer, il suffit d'éliminer de cette expression les auxiliaires qu'elle renferme, et de remplacer les dérivées du premier et du deuxième ordre du logarithme-tangente de la latitude géocentrique, par leurs valeurs en fonction des dérivées de la latitude elle-même.

A dire vrai, les formules de M. Cauchy peuvent être considérées comme donnant lieu à deux systèmes distincts. Par exemple, en groupant les équations (10), (11) [*], (12) et (15), on aura un système propre à fournir les valeurs des distances à la Terre et au Soleil, n'employant que les dérivées des deux premiers ordres, et qui n'est autre, au fond, que celui donné sous une autre forme par Laplace; il est sujet, par conséquent, aux inconvénients que nous avons signalés plus haut. On obtiendra un autre système de formules, au moyen des précédentes, moins l'équation (15), qui serait remplacée par l'équation (9), et auxquelles on ajouterait les équations (13) et (14). Ce système, outre les dérivées des deux premiers ordres de la longitude et

[*] Je distrais ici du groupe des équations (11) celle qui donne la valeur de $D_t A$.

de la latitude, contient celles du troisième ordre, et il a l'avantage de conduire à une équation finale du troisième degré, résoluble par une simple extraction de racine cubique. Mais ce système, outre l'inconvénient d'exiger l'emploi des dérivées du troisième ordre de la longitude et de la latitude à la fois, présente encore celui de donner un résultat indéterminé, dans le cas des inclinaisons nulles; ce sont les dérivées du logarithme-tangente de la latitude qui introduisent l'indétermination, et il est aisé de grouper les termes qui les contiennent, de manière à faire apparaître la même fonction CR ou $\mu'$ de Laplace, qui ne peut perdre son caractère d'indétermination, par sa combinaison avec d'autres termes. Toutefois, nous devons dire que M. Cauchy n'emploie ce second système de formules, que pour obtenir une valeur approchée de l'inconnue principale. Il la corrige ensuite, de manière à ce qu'elle satisfasse aux formules du premier système, c'est-à-dire à celles qui ne contiennent que les dérivées des deux premiers ordres.

Ainsi, la méthode de Laplace et celle de M. Cauchy, sous quelque aspect que l'on envisage cette dernière, ne peuvent fournir de résultats précis, lorsqu'on les applique au calcul des éléments des orbites des planètes peu inclinées, et ne pourraient fournir absolument aucun résultat, si on les appliquait à des planètes se mouvant dans le plan de l'écliptique.

Nous avons reconnu que le problème des planètes exige généralement l'emploi des troisièmes dérivées de la longitude géocentrique: en considérant que M. Cauchy a fait usage de cette troisième dérivée, et que néanmoins l'indétermination persiste dans les formules qu'il a obtenues, j'aurais pu renoncer à établir de nouvelles formules qui fussent exemptes de ce défaut, si le caractère de détermination du problème, dans ce cas; n'avait été pour moi la preuve suffisante de la possibilité de construire ces formules. J'y suis effectivement parvenu, et l'objet principal de ce Mémoire est d'en exposer la déduction.

## *Calcul de la distance d'une planète à la Terre, au moyen de la longitude géocentrique et de ses dérivées des trois premiers ordres, puis de la latitude et de sa dérivée du premier ordre.*

**4.** Nous adopterons des notations qui se rapprochent, autant que possible, de celles de la *Mécanique céleste*.

Soient : $f$ le coefficient de l'attraction planétaire;

M, $m$, $m'$ les masses respectives du Soleil, de la planète et de la Terre;

$$\mu = \mathrm{M} + m, \quad \mu' = \mathrm{M} + m'; \tag{1}$$

en prenant la masse du Soleil pour unité, on a

$$\mu' = 1{,}000\ 00282, \quad \log \mu' = 0{,}0[illegible]$$

Nous prendrons pour unité de distance, la distance moyenne du Soleil à la Terre; et pour unité de temps, celui pendant lequel la Terre décrit un angle d'anomalie moyenne égal à l'unité abstraite.

Désignant par :

$t$ le temps exprimé en cette espèce d'unité;

$j$ le nombre de jours correspondant;

$T'$ la durée de l'année sidérale exprimée en jours solaires moyens;

on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{t}{j} = \dfrac{2\pi}{T'} = k, & \log k = 8,235\ 5821, \\ \dfrac{1}{dt^m} = \dfrac{1}{k^m}\dfrac{1}{dj^m}, & \text{compl. } \log k = 1,764\ 4179, \\ & \text{compl. } \log k^2 = 3,528\ 8359, \\ & \text{compl. } \log k^3 = 5,293\ 2538; \end{cases}$$

on a, en outre,

$$(3)\qquad \begin{cases} f\mu' = 1, & \log f = 9,999\ 9988, \\ & \log \sqrt{f} = 9,999\ 9994; \end{cases}$$

et, en négligeant la masse inconnue $m$ de la planète, devant celle du Soleil,

$$(4)\qquad \mu = 1 \quad \text{ou} \quad f\mu = f.$$

Soient actuellement, au bout du temps $t$:

$\alpha$ la longitude géocentrique de la planète;

$\theta$ sa latitude géocentrique;

$\Delta$ sa distance à la Terre;

$\rho$ la projection de cette distance sur le plan de l'écliptique;

$x$, $y$, $z$ les trois coordonnées de la planète, parallèles à trois axes rectangulaires passant par le centre du Soleil; les axes des $x$ et des $y$ étant situés dans le plan de l'écliptique, de manière que le premier coïncide avec un équinoxe fixe, et le second soit plus avancé de 90 degrés dans l'ordre des signes, l'axe des $z$ se confondant d'ailleurs avec le pôle boréal de l'écliptique;

$r$ le rayon vecteur de la planète;

$r_1$ sa projection sur l'écliptique;

$v$ la longitude héliocentrique, comptée dans le plan de l'écliptique jusqu'au nœud ascendant, et dans le plan de l'orbite depuis ce nœud jusqu'au lieu de la planète;

$v_1$ sa longitude mesurée dans le plan de l'écliptique ou projetée;

$\lambda$ sa latitude héliocentrique;

$\Omega$ la longitude du nœud ascendant de l'orbite;

I l'inclinaison du plan de cette orbite sur l'écliptique;

$\varpi$ la longitude du périhélie mesurée, partie dans l'écliptique, et partie dans le plan de l'orbite;

V l'anomalie vraie;

$u$ l'anomalie excentrique;

A le demi-grand axe de l'orbite;

E l'excentricité;

$\Pi$ le demi-paramètre;

$N''$ le moyen mouvement héliocentrique diurne exprimé en $1''$ de degré;

$\varepsilon$ la longitude moyenne à l'époque choisie pour origine du temps;

$\eta$ l'angle ($\sin = E$).

Soient encore, au bout du temps $t$:

$\odot$ la longitude du Soleil comptée de l'équinoxe fixe;

$\delta$ sa latitude;

$\oplus$ la longitude héliocentrique vraie de la Terre, qu'on obtient en retranchant l'aberration du Soleil, de sa longitude $\odot$, et ajoutant ou retranchant 180 degrés au résultat;

$\xi = \oplus - \alpha$;

$x'$, $y'$ les coordonnées rectangulaires du centre de la Terre rapportées aux mêmes axes que ci-dessus;

R le rayon vecteur terrestre;

A' le demi-grand-axe de l'orbite terrestre;

E' l'excentricité de cette orbite;

$\Pi'$ son demi-paramètre.

Soient enfin:

$R_1$ le rayon vecteur terrestre correspondant à l'anomalie actuelle diminuée de 90 degrés, ou à la longitude $\odot$ diminuée de 90 degrés plus le mouvement du point équinoxial entre les deux époques correspondantes;

R' le rayon vecteur terrestre correspondant à l'anomalie actuelle augmentée de 90 degrés, ou à la longitude $\odot$ augmentée de 90 degrés plus le déplacement du point équinoxial entre les époques correspondantes à R et R'.

5. Les équations du mouvement relatif de translation de la planète sont, en négligeant les forces perturbatrices,

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + f\mu\dfrac{x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + f\mu\dfrac{y}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + f\mu\dfrac{z}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Celles du mouvement relatif de la Terre sont, de même,

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} + f\mu' \dfrac{x'}{R^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} + f\mu' \dfrac{y'}{R^3} = 0. \end{cases}$$

Seulement nous devons faire remarquer que ces équations sont plutôt celles du mouvement du centre de gravité de la Terre et de la Lune. Dans ce qui va suivre, nous procéderons comme si les observations avaient été faites en ce point, et nous prendrons les coordonnées angulaires ou rectangulaires du centre de la Terre, pour celles du centre de gravité des deux corps. Nous dirons en son lieu, comment il faut tenir compte de ce que le centre de figure de la Terre ne coïncide pas avec le centre de gravité de sa propre masse réunie à celle de son satellite. Il serait impossible d'y avoir égard tout d'abord, sans introduire une complication inutile dans les équations et les notations.

Les coordonnées de la planète, en fonction de celles de la Terre, ont pour expression

$$(7)\qquad \begin{cases} x = x' + \rho\cos\alpha, \\ y = y' + \rho\sin\alpha, \\ z = \rho\,\mathrm{tang}\,\theta. \end{cases}$$

Les coordonnées de la Terre sont, elles-mêmes,

$$(8)\qquad \begin{cases} x' = R\cos\odot, \\ y' = R\sin\odot. \end{cases}$$

En différentiant, par rapport au temps, deux fois de suite, les formules (7), on a

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'}{dt} + \cos\alpha\dfrac{d\rho}{dt} - \rho\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt} + \sin\alpha\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \mathrm{tang}\,\theta\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\dfrac{d\theta}{dt}; \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2x'}{dt^2} + \cos\alpha\dfrac{d^2\rho}{dt^2} - 2\sin\alpha\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt} - \rho\cos\alpha\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} - \rho\sin\alpha\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y'}{dt^2} + \sin\alpha\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + 2\cos\alpha\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt} - \rho\sin\alpha\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} + \rho\cos\alpha\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{tang}\,\theta\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + \dfrac{2}{\cos^2\theta}\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + 2\rho\dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\dfrac{d\theta^2}{dt^2} + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\dfrac{d^2\theta}{dt^2}. \end{cases}$$

Enfin, différentiant une seule fois les équations (8), il vient

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = \cos \text{☊} \dfrac{d\mathrm{R}}{dt} - \mathrm{R} \sin \text{☊} \dfrac{d\text{☊}}{dt}, \\ \dfrac{dy'}{dt} = \sin \text{☊} \dfrac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{R} \cos \text{☊} \dfrac{d\text{☊}}{dt}. \end{cases}$$

6. Avant d'aller plus loin, il convient d'indiquer un moyen de former les valeurs de $\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}$ et $\dfrac{d\text{☊}}{dt}$, qui se présentent dans les équations (11), et sont au nombre des données du problème.

En désignant généralement par V et $r$ l'anomalie vraie et le rayon vecteur d'une planète, par $e$ et $\Pi$ son excentricité et son demi-paramètre, on a

$$(12)\qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}} e \sin \mathrm{V}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dt} = \frac{\sqrt{f\mu}\sqrt{\Pi}}{r^2}.$$

Appliquons ces formules au mouvement de la Terre, et remarquons que les axes étant supposés fixes, et les quantités ☊ ou ☉, rapportées aussi à une origine fixe, il faut faire abstraction, dans leurs dérivées, de l'effet de la précession et de la nutation. De cette manière, la valeur de $\dfrac{d\text{☊}}{dt}$ s'identifie avec $\dfrac{d\mathrm{V}}{dt}$; et l'on a, en vertu des notations du n° 4,

$$(13)\qquad \frac{d\mathrm{R}}{dt} = \frac{\sqrt{f\mu'}}{\sqrt{\Pi'}} \mathrm{E}' \sin \mathrm{V}, \quad \frac{d\text{☊}}{dt} = \frac{\sqrt{f\mu'}\sqrt{\Pi'}}{\mathrm{R}^2}.$$

L'équation polaire de l'ellipse terrestre est

$$\mathrm{R} = \frac{\Pi'}{1 + \mathrm{E}' \cos \mathrm{V}},$$

équation qu'on peut mettre d'abord sous la forme

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\Pi'} + \frac{\mathrm{E}'}{\Pi'} \cos \mathrm{V}.$$

Ayant désigné plus haut par $\mathrm{R}_1$ et $\mathrm{R}'$ les rayons vecteurs terrestres correspondant respectivement aux anomalies $\mathrm{V} - 90^\circ$ et $\mathrm{V} + 90^\circ$, si l'on substitue successivement ces systèmes de valeurs, à la place de R et V, dans la précédente équation, il viendra

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1} = \frac{1}{\Pi'} + \frac{\mathrm{E}'}{\Pi'} \sin \mathrm{V},$$

$$\frac{1}{\mathrm{R}'} = \frac{1}{\Pi'} - \frac{\mathrm{E}'}{\Pi'} \sin \mathrm{V}.$$

Ces équations vont nous donner les valeurs de $\Pi'$ et $E'\sin V$, dont nous avons besoin. En les ajoutant membre à membre, on obtient la relation suivante, entre deux rayons vecteurs situés sur le prolongement l'un de l'autre,

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R_1}=\frac{2}{\Pi'}. \tag{14}$$

En retranchant la deuxième de la première, il vient

$$\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R'}=2\frac{E'}{\Pi'}\sin V:$$

divisons cette équation membre à membre par la précédente, en réduisant les termes des premiers membres au même dénominateur; $\frac{2}{\Pi'}$ disparaît, et l'on a

$$\frac{R'-R_1}{R'+R_1}=E'\sin V. \tag{15}$$

L'équation (14) donne, d'ailleurs,

$$\frac{1}{\Pi'}=\frac{R'+R_1}{2R'R_1}. \tag{16}$$

Les deux expressions (15) et (16) étant substituées dans les équations (13), il vient

$$\frac{dR}{dt}=\frac{\sqrt{f\mu'}\,(R'-R_1)}{\sqrt{2R'R_1(R'+R_1)}},\quad \frac{d\overset{+}{\delta}}{dt}=\frac{\sqrt{f\mu'}}{R^2}\sqrt{\frac{2R'R_1}{R'+R_1}}. \tag{17}$$

Ces formules permettent de calculer les valeurs numériques des composantes $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ de la vitesse de la Terre, données par les équations (11) [*].

L'auteur de la *Mécanique céleste*, en se servant du rayon $R'$ combiné avec $R$, a donné, pour la détermination des orbites des comètes, des expressions de $\frac{dR}{dt}$ et $\frac{d\overset{+}{\delta}}{dt}$ analogues à nos expressions (17); mais il y a négligé le carré de l'excentricité de l'orbite terrestre.

---

[*] Si l'on voulait être rigoureux, il faudrait, dans l'application des formules (17), corriger les valeurs de $R_1$ et $R'$, données par les Tables du Soleil, de l'effet des perturbations produites dans l'intervalle qui sépare les époques auxquelles se rapportent $R_1$ et $R'$, de l'époque actuelle à laquelle répond $R$; attendu que les valeurs de $\frac{dR}{dt}$ et $\frac{d\overset{+}{\delta}}{dt}$, données par les formules (17), supposent que les éléments de l'orbite terrestre n'ont pas changé. Il faudrait, en outre, supprimer dans le calcul des trois rayons vecteurs terrestres

7. Poursuivons maintenant nos calculs. En multipliant la première équation (10) par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$, et ajoutant membre à membre, on aura

$$\cos\alpha\frac{d^2x}{dt^2}+\sin\alpha\frac{d^2y}{dt^2}=\cos\alpha\frac{d^2x'}{dt^2}+\sin\alpha\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\frac{d\alpha^2}{dt^2}.$$

Multipliant actuellement la première des mêmes équations par $\sin\alpha$, la deuxième par $\cos\alpha$, et retranchant celle-ci de l'autre, il viendra

$$\sin\alpha\frac{d^2x}{dt^2}-\cos\alpha\frac{d^2y}{dt^2}=\sin\alpha\frac{d^2x'}{dt^2}-\cos\alpha\frac{d^2y'}{dt^2}-2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt}-\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Ces équations, en ayant égard aux relations (5) et (6), deviennent

$$(18)\begin{cases}-\dfrac{f\mu}{r^3}(x\cos\alpha+y\sin\alpha)=-\dfrac{f\mu'}{R^3}(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha)+\dfrac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2},\\[2ex] -\dfrac{f\mu}{r^3}(x\sin\alpha-y\cos\alpha)=-\dfrac{f\mu'}{R^3}(x'\sin\alpha-y'\cos\alpha)-2\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt}-\rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}.\end{cases}$$

Enfin les équations (7) et (8) donnent

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha+\rho,$$
$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=x'\sin\alpha-y'\cos\alpha,$$

ou bien

$$(19)\begin{cases}x\cos\alpha+y\sin\alpha=R(\cos\mathfrak{Z}\cos\alpha+\sin\mathfrak{Z}\sin\alpha)+\rho=R\cos\xi+\rho,\\ x\sin\alpha-y\cos\alpha=R(\cos\mathfrak{Z}\sin\alpha-\sin\mathfrak{Z}\cos\alpha)\qquad=-R\sin\xi;\end{cases}$$

substituant ces valeurs dans les équations (18) et transposant, on aura

$$(20)\qquad\begin{cases}\dfrac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2}+\rho\dfrac{f\mu}{r^3}-R\cos\xi\left(\dfrac{f\mu'}{R^3}-\dfrac{f\mu}{r^3}\right)=0,\\[2ex] 2\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt}+\rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}-R\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{R^3}-\dfrac{f\mu}{r^3}\right)=0.\end{cases}$$

---

les termes provenant de l'action de la Lune, de manière que ces rayons vecteurs fussent ceux de l'orbite décrite par le centre de gravité de la Terre et de la Lune, au lieu d'appartenir à l'orbite décrite par le centre de figure de la Terre. Cette dernière condition entraînerait comme conséquence la réduction des observations, non pas seulement au centre de la Terre, par la parallaxe, mais encore au centre de gravité de la Terre et de la Lune, au moyen d'une autre sorte de parallaxe. On peut négliger cette réduction dans une première approximation, et en faire complétement abstraction dans la correction des éléments, ainsi que nous le verrons plus loin.

Quant aux perturbations des rayons vecteurs R, et R[illegible] grand inconvénient à les négliger lorsqu'on néglige les perturbations [illegible] vent étudier, ces dernières étant souvent bien plus considér[illegible]

*Additions* 1852.

8. Les équations des nos 4 et 7 sont la simple reproduction d'une partie de celles que l'on trouve dans la *Mécanique céleste*. La troisième équation (10) contient seule la dérivée du deuxième ordre par rapport à la latitude, et je dois dire, dès à présent, qu'elle ne concourra point à la formation des équations du problème; je ne l'ai consignée ici que pour en tirer, ainsi qu'on le verra plus tard, une confirmation de l'exactitude des données fournies par l'observation. Mais les autres équations ne contiennent pas encore la dérivée du troisième ordre par rapport à la longitude, qu'il est indispensable d'y introduire.

Pour cela, je différentie la deuxième équation (20), ce qui donne

(21)
$$\left\{\begin{aligned}&\left(3\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+2\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\alpha\frac{d^3\alpha}{dt^3}-\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)\left(\sin\xi\frac{dR}{dt}-R\cos\xi\frac{d\xi}{dt}\right)\\&\qquad-3R\sin\xi\left(\frac{1}{R^4}\frac{dR}{dt}-\frac{1}{r^4}\frac{dr}{dt}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

équation dans laquelle on a

(22)
$$\xi=\text{♁}-\alpha,\qquad \frac{d\xi}{dt}=\frac{d\text{♁}}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}.$$

L'équation (21) a introduit une nouvelle dérivée qui est $\frac{dr}{dt}$. On pourrait déduire cette dérivée de la relation

$$r\frac{dr}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt},$$

en substituant dans le deuxième membre les valeurs (7) et (9); mais il est plus simple de la déduire d'une relation fournie par le triangle rectiligne dont le Soleil, la Terre et la planète occupent les sommets. Les côtés de ce triangle sont $r$, R et $\frac{\rho}{\cos\theta}$: en désignant par $z$ l'angle à la Terre, le cosinus de cet angle, à cause de ♁ = ☉ ± 180°, est

(23)
$$\cos z=-\cos\xi\cos\theta;$$

ce triangle fournit l'équation

(24)
$$r^2=R^2+2R\rho\cos\xi+\frac{\rho^2}{\cos^2\theta}.$$

Différentions complétement cette dernière, il viendra

(25)
$$\left\{\begin{aligned}&r\frac{dr}{dt}=R\frac{dR}{dt}+R\cos\xi\frac{d\rho}{dt}+\rho\cos\xi\frac{dR}{dt}-\rho R\sin\xi\frac{d\xi}{dt}+\frac{\rho}{\cos^2\theta}\frac{d\rho}{dt}\\&\qquad+\rho^2\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}\right.$$

9. Nous avons maintenant à considérer les équations (20), (21), (24) et (25), qui sont au nombre de cinq; elles contiennent les cinq inconnues $\rho$, $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, $r$ et $\frac{dr}{dt}$: il reste donc à résoudre ce système d'équations.

Nous mettrons d'abord l'équation (24) sous une autre forme, en la résolvant par rapport à $\rho$: ayant égard à la relation (23),

$$\cos\varkappa = -\cos\xi\cos\theta,$$

il vient

$$\rho = R\cos\theta\left(\cos\varkappa \pm \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - \sin^2\varkappa}\right). \tag{26}$$

Sous cette forme, la valeur de $\rho$ est ambiguë; mais observons qu'elle est nécessairement positive : il s'ensuit que toutes les fois que $\cos\varkappa$ sera négatif ou $\varkappa$ compris entre 90 et 270 degrés, il faudra prendre le signe supérieur. D'un autre côté, lorsque $r$ sera $> R$, la valeur du radical excédera la valeur absolue de $\cos\varkappa$; on ne pourrait alors admettre le double signe, quand bien même cette quantité serait positive. On ne devra donc avoir égard qu'au signe supérieur, toutes les fois que $r$ sera $> R$, ou bien que $\varkappa$ sera compris entre 90 et 270 degrés. Or ce cas est celui des planètes supérieures, les seules que l'on ait découvertes depuis l'antiquité. Lorsque $r$ pourra être supposé $< R$, ou qu'il s'agira d'une planète inférieure, il ne pourra cependant pas être $< R\sin\varkappa$, afin que le radical ne devienne pas imaginaire; mais alors les deux racines seront positives, et, indépendamment de considérations physiques, le choix de la racine sera fixé par la condition de satisfaire aux autres équations du problème. Il n'est pas présumable que ce cas présente jamais de difficulté, à moins qu'on ne découvre quelque petite planète entre Mercure et le Soleil, et si voisine de ce dernier, qu'elle disparaisse presque en même temps que lui sous l'horizon.

Nous avons résolu l'équation (24) par rapport à $\rho$, attendu qu'il ne sera possible d'obtenir les valeurs de $r$ ou de $\rho$ que par tâtonnement, et qu'il sera bien plus aisé de faire, sur la valeur de $r$, une hypothèse approchée de la vérité, que sur celle de $\rho$. En effet, les distances $\rho$ varient beaucoup, tandis que les rayons vecteurs $r$, à cause des faibles excentricités des orbites planétaires, sont beaucoup moins variables; les limites de la région dans laquelle circulent les petites planètes autour du Soleil, sont assez bien connues pour qu'on en puisse déduire une valeur de $r$ qui serve utilement de point de départ dans les calculs d'approximation.

Voici d'abord comment on pourrait concevoir la résolution des équations

du problème (toutefois, j'avertis que je ne m'attacherai pas à la pratique de ce procédé).

En partant d'une valeur hypothétique de $r$, les équations (26) donneraient celle de $\rho$; les équations (20) fourniraient, l'une la valeur de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, l'autre celle de $\frac{d\rho}{dt}$. Notons, en passant, que cette dernière présenterait l'expression de $\frac{d\rho}{dt}$ sous la forme $\frac{0}{0}$, si la planète était stationnaire en longitude, cas auquel $\frac{d\alpha}{dt}$ serait nul; la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ ne saurait, en effet, devenir infinie. Laissons cette difficulté pour le moment. L'équation (25) donnerait la valeur de $\frac{dr}{dt}$; et cette dernière, ainsi que la précédente, étant substituées dans le premier membre de l'équation (21), devraient le rendre nul, si la valeur de $r$ avait été convenablement choisie. Il est clair qu'une série plus ou moins longue de tâtonnements conduirait à la valeur de $r$, capable de satisfaire à l'équation (21).

Au lieu de procéder ainsi qu'il vient d'être dit, je vais former l'équation finale, et je donnerai ensuite la valeur approchée de la correction $\delta r$, qu'il convient de faire subir à la valeur hypothétique de $r$.

## *Formation de l'équation finale.*

**10.** Substituons d'abord la valeur de $\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt}$, tirée de la seconde équation (20), dans l'équation (25) multipliée par $\frac{d\alpha}{dt}$; il viendra

$$r\frac{dr}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{f\mu'}{2\mathrm{R}}\sin\xi\cos\xi - \frac{1}{2}\frac{f\mu}{r^3}\mathrm{R}^2\sin\xi\cos\xi$$
$$+\rho\left(\cos\xi\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{dt} - \frac{\mathrm{R}\cos\xi}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathrm{R}\sin\xi\frac{d\xi}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{f\mu'}{2\mathrm{R}^2}\frac{\sin\xi}{\cos^2\theta}\right)$$
$$-\frac{f\mu}{r^3}\frac{\rho\,\mathrm{R}\sin\xi}{2\cos^2\theta} + \frac{\rho^2}{\cos^2\theta}\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \tang\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right).$$

Maintenant, l'équation (24) donne

$$\frac{\rho^2}{\cos^2\theta} = r^2 - \mathrm{R}^2 - 2\rho\,\mathrm{R}\cos\xi.$$

Substituant cette valeur et divisant tout par $r^5$, on aura

$$\frac{1}{r^4}\frac{dr}{dt}\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{r^3}\left(\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\alpha}{dt}-\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$$

$$+\frac{1}{r^5}\left(R\frac{dR}{dt}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{f\mu'}{2R}\sin\xi\cos\xi+\frac{R^2}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-R^2\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{f\mu}{r^8}R^2\sin\xi\cos\xi$$

$$+\frac{\rho}{r^5}\left[\begin{array}{l}\cos\xi\left(\frac{dR}{dt}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{R}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-2R\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right)\\ +\sin\xi\left(\frac{f\mu'}{2R^2\cos^2\theta}-R\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt}\right)\end{array}\right]$$

$$-\rho\frac{f\mu}{r^8}\frac{R\sin\xi}{2\cos^2\theta}.$$

Multiplions encore l'équation (21) par $\frac{d\alpha}{dt}$, et mettons-y les valeurs de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, $\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt}$, tirées des équations (20), ainsi que la valeur précédente de $\frac{1}{r^4}\frac{dr}{dt}\frac{d\alpha}{dt}$. Ayant ensuite égard à la relation

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\text{♄}}{dt}-\frac{d\alpha}{dt},\quad\text{qui donne}\quad 2\frac{d\alpha}{dt}-\frac{d\xi}{dt}=3\frac{d\alpha}{dt}-\frac{d\text{♄}}{dt};$$

opérant les réductions, et posant

$$(27)\left\{\begin{array}{l}
A'=f\mu'\frac{\sin\xi}{R^2}\left(\frac{3}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{2}{R}\frac{dR}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right)+f\mu'\frac{\cos\xi}{R^2}\left(3\frac{d\alpha}{dt}-\frac{d\text{♄}}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt},\\
B'=f\mu R\frac{d\alpha}{dt}\left[\sin\xi\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}-3\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{dt}\right)-\cos\xi\left(3\frac{d\alpha}{dt}-\frac{d\text{♄}}{dt}\right)\right],\\
C'=-3f\mu R^3\sin\xi\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}-\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{f\mu'}{R^3}\sin\xi\cos\xi\right],\\
D'=\frac{3}{2}(f\mu)^2R^3\sin^2\xi\cos\xi;\\
A''=\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}+2\frac{d\alpha^3}{dt^3}\right)\frac{d\alpha}{dt}-\frac{3}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)^2,\\
B''=-2f\mu\frac{d\alpha^2}{dt^2},\\
C''=-3f\mu R^2\sin\xi\left\{\begin{array}{l}\cos\xi\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}-2\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]\\ \qquad+\sin\xi\left(\frac{1}{2\cos^2\theta}\frac{f\mu'}{R^3}-\frac{d\xi}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right)\end{array}\right\},\\
D''=\frac{3}{2}\frac{(f\mu)^2R^2\sin^2\xi}{\cos^2\theta},
\end{array}\right.$$

l'équation (21), transformée, pourra s'écrire

$$(28) \qquad A' + \frac{B'}{r^3} + \frac{C'}{r^5} + \frac{D'}{r^8} + \rho\left(A'' + \frac{B''}{r^3} + \frac{C''}{r^5} + \frac{D''}{r^8}\right) = 0.$$

Il suffirait d'y substituer la valeur de $\rho$, équation (26), pour qu'elle ne contînt plus que la seule inconnue $r$.

Nous devons nous attendre à ce que l'équation (28) soit satisfaite par $r = R$, en supposant d'ailleurs $f\mu = f\mu'$. Pour nous en assurer, formons d'abord l'expression

$$\frac{A'}{(f\mu')^2} + \frac{B'}{f\mu' f\mu R^3} + \frac{C'}{f\mu' f\mu R^5} + \frac{D'}{(f\mu)^2 R^8},$$

au moyen des valeurs (27); nous trouverons cette quantité nulle identiquement, et si nous cherchons à former une expression analogue, en substituant R à $r$ dans le coefficient de $\rho$, équation (28), il nous suffira, pour reconnaître que ce coefficient ne s'annule pas, d'observer que $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$ entre dans un seul terme des expressions (27); il vient donc $\rho = 0$, comme cela doit être. Quant à l'équation (26), elle se trouve satisfaite en donnant au radical le signe contraire à celui de $\cos x$.

La relation

$$\frac{A'}{(f\mu')^2} + \frac{B'}{f\mu' f\mu R^3} + \frac{C'}{f\mu' f\mu R^5} + \frac{D'}{(f\mu)^2 R^8} = 0$$

pourra être employée à la vérification de l'exactitude des valeurs numériques des coefficients A', B', C', D'.

On voit aisément qu'en faisant disparaître de l'équation (28) les dénominateurs, puis élevant au carré pour faire disparaître le radical introduit par $\rho$, on obtiendrait une réduite en $r$ qui s'élèverait au dix-huitième degré; nous ne procéderons point de la sorte, afin de ne pas introduire de racines étrangères, et pour éviter d'ailleurs toute complication inutile. Nous conserverons donc aux équations (26) et (28) leur forme actuelle, et nous en tirerons les valeurs de $r$ et $\rho$ par des approximations successives.

Soit $\Phi$ la valeur du premier membre de l'équation (28) relative à une valeur quelconque de $r$, en y supposant celle de $\rho$ fournie par l'équation (26). Construisons la dérivée de $\Phi$ par rapport à $r$; il viendra

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{3B'}{r^4} - \frac{5C'}{r^6} - \frac{8D'}{r^9} + \frac{d\rho}{dr}\left(A'' + \frac{B''}{r^3} + \frac{C''}{r^5} + \frac{D''}{r^8}\right)$$
$$- \rho\left(\frac{3B''}{r^4} + \frac{5C''}{r^6} + \frac{8D''}{r^9}\right),$$

et, si l'on fait varier $r$ et $\rho$ seulement dans l'équation (24), on aura

$$rdr = \left(\mathrm{R}\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\right) d\rho.$$

La valeur de $\frac{d\rho}{dr}$ tirée de cette équation étant substituée dans la précédente, il s'ensuivra

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\Phi}{dr} = -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{3\mathrm{B}'}{r^3} + \dfrac{5\mathrm{C}'}{r^5} + \dfrac{8\mathrm{D}'}{r^8}\right) - \dfrac{\rho}{r}\left(\dfrac{3\mathrm{B}''}{r^3} + \dfrac{5\mathrm{C}''}{r^5} + \dfrac{8\mathrm{D}''}{r^8}\right) \\ \qquad + \dfrac{r}{\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}}\left(\mathrm{A}'' + \dfrac{\mathrm{B}''}{r^3} + \dfrac{\mathrm{C}''}{r^5} + \dfrac{\mathrm{D}''}{r^8}\right). \end{array}\right.$$

En supposant que la valeur de $r$, d'où l'on a tiré $\rho$ et $\Phi$, ne soit pas très-éloignée de satisfaire à l'équation (28), une valeur approchée de la correction $\delta r$ de cette inconnue sera donnée par la formule

$$(30)\quad \delta r = -\frac{\Phi}{\dfrac{d\Phi}{dr}}.$$

Au moyen de la valeur corrigée de $r$, on devra de nouveau calculer $\rho$ par l'équation (26), et introduire ces valeurs de $r$ et de $\rho$ dans le premier membre de l'équation (28). Si cette équation n'est pas exactement satisfaite, on procédera de la même manière à une nouvelle correction.

Examinons ce que devient l'équation (28), lorsque $\frac{d\alpha}{dt}$ est nul, ou lorsque la planète est stationnaire en longitude. On voit d'abord que les coefficients $\mathrm{B}'$ et $\mathrm{B}''$ s'annulent. On peut dès lors écrire l'équation (28) sous la forme

$$\mathrm{A}' + \mathrm{A}''\rho + \frac{1}{r^5}(\mathrm{C}' + \mathrm{C}''\rho) + \frac{1}{r^8}(\mathrm{D}' + \mathrm{D}''\rho) = 0.$$

Celle-ci devient, en y substituant les valeurs que prennent, dans cette circonstance, les coefficients (27), et supprimant le facteur $\frac{3}{2}$,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left(\frac{f\mu'\sin\xi}{\mathrm{R}^2} - \rho\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$$
$$-\frac{f\mu\,\mathrm{R}^2\sin\xi}{r^5}\left[(\mathrm{R}+\rho\cos\xi)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}\sin\xi\left(\mathrm{R}\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\right]$$
$$+ (f\mu)^2\frac{\mathrm{R}^2\sin^2\xi}{r^8}\left(\mathrm{R}\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\right) = 0.$$

Or l'équation (24), mise sous la forme

$$r^2 = \mathrm{R}(\mathrm{R} + \rho\cos\xi) + \rho\left(\mathrm{R}\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\right), \tag{30 bis}$$

donne

$$\frac{\mathrm{R}}{r^2}(\mathrm{R} + \rho\cos\xi) = 1 - \frac{\rho}{r^2}\left(\mathrm{R}\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\right).$$

Substituant cette valeur dans le second terme de l'équation précédente, il vient

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left(\frac{f\mu'\sin\xi}{\mathrm{R}^2} - \frac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^3} - \rho\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$$
$$-\frac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\left(\mathrm{R}\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\left(-\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{f\mu'\sin\xi}{\mathrm{R}^2} - \frac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^3}\right) = 0.$$

On peut aisément mettre cette équation sous la forme

$$\left[\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathrm{R}\sin\xi\left(\frac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \frac{f\mu}{r^3}\right)\right]\left[\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\left(\mathrm{R}\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\right] = 0. \tag{31}$$

Le premier de ces facteurs, égalé à zéro, est ce que devient la seconde équation (20) dans l'hypothèse de $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, et l'on aurait pu immédiatement poser, dans ce cas,

$$\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathrm{R}\sin\xi\left(\frac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \frac{f\mu}{r^3}\right) = 0 \tag{32}$$

comme l'une des équations du problème; en effet, cette équation, combinée avec l'équation (24), donnerait $r$ et $\rho$, tandis que la première équation (20) donnerait $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, et les équations (21) et (25) feraient connaître ensuite $r\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\rho}{dt}$. Le deuxième facteur ci-dessus est donc un facteur étranger à la question, et introduit seulement par l'élimination des trois inconnues que nous venons de désigner.

Il n'est pas hors de propos d'indiquer un moyen de résoudre l'équation (32). Soit

$$\rho' = \frac{\rho}{\mathrm{R}\cos\theta},$$

l'équation (24) pourra s'écrire

$$r^2 = \mathrm{R}^2(1 + 2\rho'\cos\theta\cos\xi + \rho'^2)$$

ou

$$r^2 = \mathrm{R}^2(1 - 2\rho'\cos\varkappa + \rho'^2);$$

au moyen de cette valeur, l'équation (32) devient

$$\rho' \cos\theta \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{\sin\xi}{R^3}\left[f\mu' - f\mu(1 - 2\rho'\cos x + \rho'^2)^{-\frac{3}{2}}\right] = 0.$$

Si l'on pose ensuite

$$h' = -\frac{f\mu'}{R^3}\frac{\sin\xi}{\cos\theta\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}},$$

(33) il viendra

$$\rho' - h'\left[\frac{\mu}{\mu'}(1 - 2\rho'\cos x + \rho'^2)^{-\frac{3}{2}} - 1\right] = 0.$$

Or on peut, dans une première approximation, supposer $\frac{\mu}{\mu'} = 1$, et l'équation précédente, ainsi modifiée, a été résolue, il y a déjà longtemps, par M. Binet, au moyen d'une construction très-élégante: on corrigerait la valeur approchée de $\rho'$ en employant les équations

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\rho'} = 1 + 3\dfrac{\mu}{\mu'}h'\rho'(\rho' - \cos x)(1 - 2\rho'\cos x + \rho'^2)^{-\frac{5}{2}}, \\ \delta\rho' = -\dfrac{\varphi}{\dfrac{d\varphi}{d\rho'}}, \end{cases}$$

dans lesquelles $\varphi$ désigne le premier membre de la seconde équation (33).

Les équations (33) mettent en évidence ce fait intéressant, que dans le cas où un astre est stationnaire en longitude, il suffit d'en connaître les coordonnées angulaires et la deuxième dérivée de la longitude géocentrique, pour déterminer ses distances à la Terre et au Soleil; mais ces données sont insuffisantes, comme on le prévoit aisément, pour déterminer les éléments de l'orbite.

On remarquera, en outre, que si l'époque choisie est l'instant de l'opposition, auquel cas $\xi$ devient nul, l'équation du problème se simplifie considérablement; elle se réduit, en effet, à

$$A' + \frac{B'}{r^3} + \rho\left(A'' + \frac{B''}{r^3}\right) = 0,$$

et les coefficients A', B' se réduisent eux-mêmes aux termes affectés du facteur $\cos\xi$.

**11.** Les valeurs de $r$ et $\rho$ étant connues, dans tous les cas, par ce qui précède, il s'agit maintenant de calculer leurs dérivées $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\rho}{dt}$. Distinguons

deux circonstances : 1° le mouvement en longitude géocentrique sera considérable, comme cela a lieu vers l'opposition ; 2° il sera nul ou presque nul, c'est-à-dire que la planète sera stationnaire en longitude, ou à peu près.

Si la planète est voisine de l'opposition, on aura facilement les valeurs de $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, par les équations (20), qui donneront

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{1}{2\dfrac{d\alpha}{dt}}\left[\mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}-\dfrac{f\mu}{r^3}\right)-\rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}\right], \\ \dfrac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}\cos\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}-\dfrac{f\mu}{r^3}\right)+\rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2}-\rho\dfrac{f\mu}{r^3}. \end{cases}$$

L'équation (25), dans laquelle nous grouperons les termes du deuxième membre, fournira la valeur suivante de $r\frac{dr}{dt}$, en ayant égard à la seconde équation (22),

$$(36)\qquad \begin{cases} r\dfrac{dr}{dt} = (\mathrm{R}+\rho\cos\xi)\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}-\rho\mathrm{R}\sin\xi\dfrac{d\xi}{dt} \\ \qquad\qquad +\left(\mathrm{R}\cos\xi+\dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\dfrac{d\rho}{dt}+\dfrac{\rho^2}{\cos^2\theta}\operatorname{tang}\theta\dfrac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

Toutefois, nous remarquerons que le calcul de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ serait ici sans objet, si nous ne devions pas nous ménager un moyen de vérifier les calculs effectués. Or cette vérification s'obtiendra en substituant dans l'équation (21) toutes les quantités déterminées précédemment ; celle-ci devra être satisfaite si tous les calculs sont exacts. Il va sans dire que les données elles-mêmes sont supposées l'être.

Si la planète est stationnaire en longitude, ou peu éloignée d'une station, la première équation (35) est impropre à fournir la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, attendu que $\frac{d\alpha}{dt}$ serait nul ou très-petit, et que $\frac{d\rho}{dt}$ ne peut devenir infini ; la parenthèse qui multiplie $\frac{1}{2\frac{d\alpha}{dt}}$ deviendrait donc elle-même nulle ou très-petite, ce qui donnerait la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ sous la forme $\frac{0}{0}$, ou mal déterminée. Pour éviter cet inconvénient, nous allons former une autre expression de $\frac{d\rho}{dt}$, et, à cet effet, déduire cette inconnue et $r\frac{dr}{dt}$ des deux équations (21)

et (25) ou (36). Afin d'abréger, posons

$$(37)\quad \begin{cases} Q = (R + \rho\cos\xi)\dfrac{dR}{dt} - \rho R\sin\xi\dfrac{d\xi}{dt} + \dfrac{\rho^2}{\cos^2\theta}\tang\theta\dfrac{d\theta}{dt}, \\ Q' = 2\dfrac{d\alpha}{dt}\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + 3\dfrac{f\mu'}{R^3}\sin\xi\dfrac{dR}{dt} + \rho\dfrac{d^3\alpha}{dt^3} \\ \qquad\qquad - \left(\dfrac{f\mu'}{R^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right)\left[\sin\xi\dfrac{dR}{dt} + R\cos\xi\dfrac{d\xi}{dt}\right], \end{cases}$$

les équations (36) et (21) deviendront

$$(38)\quad \begin{cases} r\dfrac{dr}{dt} = Q + \left(R\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\dfrac{d\rho}{dt}, \\ \dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{f\mu R\sin\xi}{r^5}r\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{1}{3}Q' = 0. \end{cases}$$

Éliminons $r\dfrac{dr}{dt}$ entre ces équations, il viendra

$$\frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{f\mu R\sin\xi}{r^5}Q - \frac{f\mu R\sin\xi}{r^5}\left(R\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{3}Q' = 0,$$

d'où

$$(39)\quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\dfrac{f\mu R\sin\xi}{r^5}Q - \dfrac{1}{3}Q'}{\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{f\mu R\sin\xi}{r^5}\left(R\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)};$$

on aurait de même, par l'élimination de $\dfrac{d\rho}{dt}$,

$$(40)\quad r\frac{dr}{dt} = \frac{Q\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{1}{3}Q'\left(R\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)}{\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{f\mu R\sin\xi}{r^5}\left(R\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)}.$$

On pourra donc calculer $\dfrac{d\rho}{dt}$ et $r\dfrac{dr}{dt}$ par ces deux dernières formules, ou bien en employer une seule, en se servant de l'une des deux équations (38) pour déduire l'autre inconnue, et n'oubliant pas que la valeur de $\dfrac{d^2\rho}{dt^2}$, contenue dans Q', doit être calculée par la seconde équation (35). On devra substituer ensuite tous les nombres obtenus, dans la seconde équation (20) qui sera satisfaite si les calculs sont exacts.

Nous ferons remarquer qu'il eût été possible d'établir notre équation (28) en

éliminant $\frac{d\rho}{dt}$ entre l'équation (39) et la seconde équation (20); le résultat de l'élimination est

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}-\dfrac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\left(\mathrm{R}\cos\xi+\dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\right]\left[\mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}-\dfrac{f\mu}{r^3}\right)-\rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}\right]\\ \qquad -2\left(\dfrac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\mathrm{Q}-\dfrac{1}{3}\mathrm{Q}'\right)\dfrac{d\alpha}{dt}=0.\end{array}\right.$$

En mettant dans Q' l'expression de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, seconde équation (35), et substituant ici les valeurs de Q et de Q', on obtiendrait, à l'aide de l'équation (24), une transformée qui serait identique avec l'équation (28). L'équation actuelle se change immédiatement en l'équation (31), si l'on fait $\frac{d\alpha}{dt}=0$.

Examinons actuellement le dénominateur commun des valeurs de $\frac{d\rho}{dt}$ et $r\frac{dr}{dt}$, équations (39) et (40). C'est vers l'opposition que la valeur de $\frac{d\alpha}{dt}$ atteint un de ses maximums; la valeur de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ est donc alors nulle, et à cette même époque l'angle $\xi$, et, par suite, le facteur $\sin\xi$ sont pareillement nuls. Le dénominateur dont il s'agit se réduit donc à zéro, et comme $\frac{d\rho}{dt}$ et $r\frac{dr}{dt}$ ne peuvent devenir infinis, les formules (39) et (40) donnent des résultats indéterminés. Rappelons que ce n'est point pour en faire usage dans ce cas, que nous avons établi ces formules, mais bien pour les appliquer lorsque la planète est stationnaire en longitude. Dans cette circonstance, la seconde équation (20) donne

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\frac{\mathrm{R}\sin\xi}{\rho}\left(\frac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}-\frac{f\mu}{r^3}\right);$$

on tire aussi de l'équation (30 *bis*),

$$\frac{1}{r^2}\left(\mathrm{R}\cos\xi+\frac{\rho}{\cos^2\theta}\right)=\frac{1}{\rho}\left[1-\frac{\mathrm{R}}{r^2}(\mathrm{R}+\rho\cos\xi)\right].$$

Au moyen de ces valeurs, le dénominateur en question devient, toute réduction faite,

$$\frac{\mathrm{R}\sin\xi}{\rho}\left[\frac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}-2\frac{f\mu}{r^3}+\frac{f\mu\,\mathrm{R}}{r^5}(\mathrm{R}+\rho\cos\xi)\right].$$

Enfin, si l'on désigne par $\sigma$ l'angle au Soleil, compris entre les rayons vecteurs

de la Terre et de la planète, la théorie des projections montre que l'on a

$$R + \rho \cos \xi = r \cos \sigma.$$

On peut évidemment déduire cette relation de la considération du triangle formé par le Soleil, la Terre et la planète: ce triangle, dans lequel le côté opposé au Soleil est $\frac{\rho}{\cos \theta}$, donne

$$\frac{\rho^2}{\cos^2 \theta} = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \sigma;$$

mais l'équation (24) est

$$r^2 = R^2 + 2R\rho \cos \xi + \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta}.$$

Ajoutant membre à membre et réduisant, il vient

$$0 = 2R^2 + 2R\rho \cos \xi - 2Rr \cos \sigma,$$

d'où

$$R + \rho \cos \xi = r \cos \sigma.$$

Cette valeur donne au dénominateur commun des seconds membres des équations (39) et (40) la forme

$$\frac{R \sin \xi}{\rho} \left( \frac{f\mu'}{R^3} - \frac{2f\mu}{r^3} + \frac{f\mu R}{r^4} \cos \sigma \right),$$

ou bien la suivante, en faisant, pour plus de simplicité, $f\mu = f\mu'$,

$$(41\ bis) \qquad \frac{f\mu'}{R^2} \frac{\sin \xi}{\rho} \left( 1 - 2\frac{R^3}{r^3} + \frac{R^4}{r^4} \cos \sigma \right).$$

Pour discuter complétement cette expression, il y aurait à exprimer les conditions géométriques et mécaniques du phénomène de la station en longitude. On parviendrait, de la sorte, à une relation entre $r$ et $\cos \sigma$, qui permettrait d'exprimer cette dernière quantité en fonction de $r$; mais cette expression contiendrait les demi-grands axes, les excentricités et les inclinaisons, et serait d'une discussion très-difficile.

Nous allons rechercher les limites entre lesquelles l'expression (41 *bis*) pourrait devenir nulle. Dans les circonstances où nous en voulons faire usage, les facteurs $\sin \xi$ et $\rho$ ne peuvent s'annuler; il n'y a donc à examiner que les cas où la parenthèse elle-même pourrait se réduire à zéro.

Posons, à cet effet, $\frac{r}{R} = v$, et désignons par P′ la valeur de cette paren-

thèse ; il viendra

$$P' = 1 - \frac{2}{v^3} + \frac{\cos\sigma}{v^4}.$$

En la réduisant à zéro et tirant la valeur de $\cos\sigma$, on aura

$$\cos\sigma = 2v - v^4.$$

Considérons maintenant séparément le cas où $\cos\sigma$ serait positif, et celui où il serait négatif.

1°. $\cos\sigma$ étant supposé positif, on a les deux conditions

$$\cos\sigma < 1, \quad \cos\sigma > 0,$$

ou bien

$$2v - v^4 - 1 < 0; \quad 2v - v^4 > 0.$$

Les premiers membres de ces inégalités étant réduits en facteurs, donnent, en changeant leurs signes,

$$(v - 1)(v - 0{,}5437)(v^2 + 1{,}5437\,v + 1{,}8393) > 0; \quad v(v^3 - 2) < 0.$$

Or, $v$ étant essentiellement positif, on peut supprimer ici les facteurs que cette circonstance rend positifs ; il en résulte les conditions

$$(v - 1)(v - 0{,}5437) > 0; \quad v^3 - 2 < 0.$$

La première de ces conditions donne lieu aux deux systèmes suivants :

$$v > 1, \quad v > 0{,}5437; \qquad v < 1, \quad v < 0{,}5437.$$

La fonction $P'$ ne peut donc s'annuler que pour des valeurs de $v$ prises en dehors des limites 0,5437 et 1.

La seconde condition revient à

$$v < \sqrt[3]{2} \quad \text{ou} \quad v < 1{,}2599.$$

Ainsi $P'$ ne s'annulera pas pour des valeurs de $v > 1{,}2599$. Il est donc établi, pour le cas où $\cos\sigma$ est positif, que $P'$ ne peut s'annuler que pour des valeurs de $v$ comprises entre 0 et 0,5437, puis entre 1 et 1,2599.

2°. $\cos\sigma$ étant supposé négatif, les deux conditions

$$-\cos\sigma < 1, \quad -\cos\sigma > 0,$$

donnent

$$v^4 - 2v - 1 < 0; \quad v^4 - 2v > 0.$$

On en tire, en procédant comme plus haut,

$$(v - 1{,}3954)(v^3 + 1{,}3954\,v^2 + 1{,}9471\,v + 0{,}7167) < 0; \quad v(v^3 - 2) > 0;$$

ou, en supprimant les facteurs essentiellement positifs,

$$\upsilon < 1,3954; \quad \upsilon > 1,2599.$$

Ainsi, la valeur de P′ ne pourrait s'annuler, lorsque $\cos\sigma$ est négatif, que pour des valeurs de $\upsilon$ comprises entre 1,2599 et 1,3954, c'est-à-dire dans le cas de planètes supérieures situées dans une zone dont la limite inférieure serait le milieu des distances moyennes de la Terre et de Mars au Soleil; la largeur de cette zone serait 0,1355.

La zone pour laquelle l'indétermination paraîtrait possible, dans le cas des planètes supérieures, est assez peu étendue pour que l'on soit tenté de croire à l'impossibilité d'annuler P′ lorsque $\upsilon$ est $> 1$. S'il n'est pas possible de le démontrer généralement, il est, au contraire, très-aisé de le faire dans l'hypothèse des excentricités et inclinaisons nulles.

Nous allons former l'équation de la station, dans cette hypothèse. Soient: (*Pl. III, fig.* 1) S, T, P les lieux du Soleil, de la Terre et de la planète; T′ et P′ deux lieux de la Terre et de la planète infiniment voisins des précédents, et situés sur les perpendiculaires aux rayons vecteurs R et $r$. La condition pour que la planète paraisse stationnaire est que deux directions consécutives PT, P′T′ soient parallèles. Nous les supposerons telles; menons par le point P une parallèle P$t$ à TT′, jusqu'à la rencontre de la droite P′T′ prolongée s'il est nécessaire. Le triangle infinitésimal PP′$t$ donnera la relation suivante :

$$\frac{\overline{Pt}}{\overline{P'P}} = \frac{\sin PP't}{\sin \widehat{P't}P};$$

mais $\overline{P't} = \overline{T'T}$, et les déplacements T′T, P′P sont respectivement égaux à $RN'dt$, $rNdt$, N′ désignant le moyen mouvement terrestre, de sorte que le premier membre de cette équation est égal à $\frac{R}{r}\frac{N'}{N}$. D'un autre côté, la troisième loi de Képler donne

$$R^3N'^2 = r^3N^2,$$

d'où

$$\frac{N'}{N} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

La valeur du rapport $\frac{\overline{Pt}}{\overline{P'P}}$ devient donc simplement $\sqrt{\frac{r}{R}}$ ou $\sqrt{\upsilon}$. Si l'on désigne par P et T les angles en P et T dans le triangle PST, et par $\sigma$, comme ci-dessus, l'angle en S; le second membre de l'équation considérée

deviendra $-\frac{\cos P}{\cos T}$, et l'on aura

$$\sqrt{\upsilon} = -\frac{\cos P}{\cos T}.$$

La proportionnalité des sinus, dans le triangle PST, donne d'ailleurs

$$\upsilon = \frac{\sin T}{\sin P};$$

enfin l'on a

$$\sigma = 180^\circ - (P + T),$$

d'où

$$\cos\sigma = -\cos(P + T).$$

En éliminant P et T entre ces trois équations, on a, pour déterminer l'angle $\sigma$ au moment de la station,

$$\cos\sigma = \frac{1}{\sqrt{\upsilon} + \frac{1}{\sqrt{\upsilon}} - 1}.$$

D'ailleurs, si l'on calcule les valeurs de $\cos\sigma$ correspondantes à $\upsilon = 1,2599$ et $\upsilon = 1,3954$, on trouve 0,99 et 0,97 environ; ces quantités sont, comme on le voit, fort éloignées d'être négatives.

Si l'on suppose $\upsilon > 1$, $\sqrt{\upsilon} - 1$ sera une quantité positive; il s'ensuit que $\cos\sigma$ sera essentiellement positif. Or nous avons trouvé généralement que $\cos\sigma$ étant négatif, on ne peut redouter l'indétermination que pour des valeurs de $\upsilon$ comprises entre 1,2599 et 1,3954; il en résulte que, dans l'hypothèse du mouvement circulaire et d'inclinaisons nulles, l'indétermination n'est point à redouter pour les planètes supérieures.

On peut encore examiner ce que devient P′ dans le cas des planètes inférieures, et toujours dans l'hypothèse des excentricités et inclinaisons nulles. Cette fonction devient, en y introduisant la valeur de $\cos\sigma$,

$$P' = 1 - \frac{2}{\upsilon^3} + \frac{1}{\upsilon^4}\,\frac{1}{\sqrt{\upsilon} + \frac{1}{\sqrt{\upsilon}} - 1}.$$

En égalant P′ à zéro et cherchant les valeurs positives de $\upsilon$ qui y satisfont, on trouve d'abord $\upsilon = 1$, puis ensuite $\upsilon = 0,45$ environ. L'équation $P' = 0$ étant developpée s'élève au neuvième degré : elle a seulement trois racines positives; mais la troisième racine, dont la valeur est 1,3 à peu près, répond à une valeur négative de $\sqrt{\upsilon}$, et doit être rejetée.

De ce qui précède, il faut conclure que l'indétermination des expres-

sions (39) et (40), relatives au cas où la planète est dans le voisinage de sa station, n'est réellement à redouter que pour des planètes inférieures qui seraient situées à une distance du Soleil, comprise entre 0,4 et 0,6.

Les valeurs de $\frac{d\rho}{dt}$ et $r\frac{dr}{dt}$, équations (39) et (40), dépendent de Q et Q'. Ces dernières quantités introduisent les valeurs de $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$ et de $\frac{d\theta}{dt}$, qui étaient devenues inutiles pour le calcul des distances $r$ et $\rho$ lorsqu'on a $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, mais qui ne disparaissent pas des expressions de leurs dérivées dans la même circonstance. Ainsi, il ne paraît pas jusqu'ici que l'on doive obtenir beaucoup moins d'exactitude en prenant une époque voisine de la station en longitude, que dans tout autre cas, puisqu'il faut toujours, en définitive, faire usage des dérivées du troisième ordre. Le choix d'une époque voisine de l'opposition n'aurait d'autre avantage que de faire dépendre les coordonnées héliocentriques et leurs dérivées, de distances à la Terre beaucoup moindres et, par conséquent, susceptibles d'être déterminées avec plus d'exactitude. Il est évident qu'il faut en profiter toutes les fois que cela est possible; mais il était important de montrer que les formules, convenablement établies, donnent néanmoins des résultats qu'on ne saurait considérer comme défectueux, si on les applique aux époques voisines de la station, attendu que, dans plusieurs cas, cette époque a coïncidé à peu près avec l'époque moyenne des observations faites pendant la durée de l'apparition des nouvelles petites planètes.

On pourrait combiner de diverses manières la première équation (35) et l'équation (39) pour en déduire une valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ à la fois convenable au cas de la station et de l'opposition, et qui serait, par suite, d'un usage général.

Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$(42)\qquad \begin{cases} p = \mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right) - \rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ q = \dfrac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\mathrm{Q} - \dfrac{1}{3}\mathrm{Q}', \\ q' = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\left(\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right), \end{cases}$$

la seconde équation (20) et l'équation (39) donneront

$$2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = p,$$

$$q'\frac{d\rho}{dt} = q;$$

multipliant la première équation par $2\frac{d\alpha}{dt}$, la seconde par $q'$, puis ajoutant membre à membre, il viendra

$$\left(4\frac{d\alpha^2}{dt^2}+q'^2\right)\frac{d\rho}{dt}=2p\frac{d\alpha}{dt}+qq',$$

d'où

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{2p\frac{d\alpha}{dt}+qq'}{4\frac{d\alpha^2}{dt^2}+q'^2}. \tag{43}$$

Le dénominateur de cette expression ne s'annulerait que si les quantités $\frac{d\alpha}{dt}$ et $q'$ pouvaient se réduire en même temps à zéro; et nous avons vu que cela n'est point à craindre pour les planètes supérieures.

Si l'on fait usage de la formule (43), on devra calculer ensuite $r\frac{dr}{dt}$, au moyen de la première équation (38); la substitution des valeurs calculées, dans le second membre de l'équation (36), offrira un moyen de vérifier l'exactitude des calculs.

## *Calcul des coordonnées, des composantes de la vitesse parallèles aux axes coordonnés, et des éléments de l'orbite.*

**12.** Ce qui va suivre n'est qu'une reproduction des formules de Laplace, sauf le calcul de l'anomalie vraie et de l'excentricité.

Les coordonnées de la Terre se déduisent des équations (8). Les composantes de sa vitesse sont données par les équations (17) et (11). Les équations (7) et (9) font connaître les coordonnées de la planète et les composantes de sa vitesse.

Le calcul des coordonnées de la planète peut se vérifier par la relation

$$r^2=x^2+y^2+z^2; \tag{44}$$

la valeur de $r$ qu'on en tire doit coïncider avec la racine de l'équation (28).

Si l'on calcule ensuite le second membre de l'expression

$$r\frac{dr}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}, \tag{45}$$

on devra trouver une valeur de $r\frac{dr}{dt}$ concordante avec celle qui a été obtenue plus haut.

Les constantes des aires sont données par les formules

$$(46)\qquad \begin{cases} G = y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}, \\ G' = z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}, \\ G'' = x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}. \end{cases}$$

La valeur de G″, étant trouvée positive, montrera que le mouvement projeté sur l'écliptique est direct, et que, par suite, l'inclinaison est comprise entre 0 et 90 degrés; dans le cas contraire, qui ne se présente pas pour les planètes, le mouvement projeté serait rétrograde, et l'inclinaison serait comprise entre 90 et 180 degrés. Le calcul de ces formules se vérifie par l'équation

$$(47)\qquad Gx + G'y + G''z = 0,$$

qui est celle du plan de l'orbite.

On obtient ensuite l'inclinaison du plan de l'orbite, par l'équation suivante

$$(48)\qquad \operatorname{tang} I = \frac{\sqrt{G^2 + G'^2}}{G''},$$

dans laquelle le radical n'est pas affecté du signe $\pm$, attendu que le signe est donné, en vertu de ce qui précède, par celui de G″.

La longitude du nœud ascendant se déduit de

$$(49)\qquad \operatorname{tang} \Omega = -\frac{G}{G'}.$$

La valeur de $\Omega$ déduite de cette formule est ambiguë : pour distinguer s'il faut ou non ajouter 180 degrés à l'angle donné par les Tables, nous aurons égard à la relation

$$(50)\qquad \operatorname{tang} \lambda = \sin(v_1 - \Omega) \operatorname{tang} I,$$

qui doit être satisfaite par un choix convenable de l'angle $\Omega$.

Soit, pour abréger,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

on aura

$$(51)\qquad x = r_1 \cos v_1, \quad y = r_1 \sin v_1, \quad z = r_1 \operatorname{tang} \lambda;$$

d'où, en vertu de l'équation (50),

$$z = (r_1 \sin v_1 \cos \Omega - r_1 \cos v_1 \sin \Omega) \operatorname{tang} I;$$

ou

$$z = \cos \Omega\!\!\!/ \,(y - x \operatorname{tang} \Omega\!\!\!/) \operatorname{tang} I,$$

et, à cause de l'équation (49),

$$z = \frac{\cos \Omega\!\!\!/}{G'}(Gx + G'y) \operatorname{tang} I.$$

Mais l'équation (47) permet d'en déduire, après la suppression du facteur commun $z$,

$$1 = -\frac{\cos \Omega\!\!\!/}{G'} G'' \operatorname{tang} I;$$

en ayant égard aux équations (48) et (49), cette relation donne

$$\sqrt{G^2 + G'^2} = \frac{G}{\sin \Omega\!\!\!/} = -\frac{G'}{\cos \Omega\!\!\!/}.$$

Il s'ensuit que $\Omega\!\!\!/$ doit être choisi de manière que son sinus ait le signe de G, ou son cosinus le signe contraire à celui de G'.

Cette dernière expression permet de donner au calcul de tang I la forme logarithmique, en supposant qu'on ait d'abord calculé $\Omega\!\!\!/$ ; il vient, en effet,

$$\operatorname{tang} I = -\frac{1}{\sin \Omega\!\!\!/}\frac{G}{G''} = -\frac{1}{\cos \Omega\!\!\!/}\frac{G'}{G''}. \tag{52}$$

Pour obtenir le demi-paramètre $\Pi$, que l'on désigne en fonction de l'excentricité, par $A(1 - E^2)$ ou $A\cos^2\eta$, on emploiera l'une des formules

$$\begin{cases} \Pi = \dfrac{1}{f\mu}(G^2 + G'^2 + G''^2) = \dfrac{1}{f\mu}\dfrac{G''^2}{\cos^2 I}, \\ \Pi = \dfrac{1}{f\mu}\left[r^2\left(\dfrac{dx^2}{dt^2} + \dfrac{dy^2}{dt^2} + \dfrac{dz^2}{dt^2}\right) - \left(r\dfrac{dr}{dt}\right)^2\right]. \end{cases} \tag{53}$$

Le demi-grand axe se déduira de l'équation des forces vives

$$\frac{1}{A} = \frac{2}{r} - \frac{1}{f\mu}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right). \tag{54}$$

La durée de la révolution sera fournie par la troisième loi de Képler : en prenant la durée de l'année sidérale pour unité de temps, on a

$$T = \sqrt{\frac{f\mu'}{f\mu}}\, A^{\frac{3}{2}}. \tag{55}$$

La valeur du moyen mouvement héliocentrique diurne exprimé en secondes

sexagésimales s'en déduira, et aura pour expression

$$(56) \qquad N'' = \frac{1}{T}\frac{k}{\sin 1''}, \quad \log\frac{k}{\sin 1''} = 3{,}550\ 0072,$$

en vertu de la première équation (2).

On formera ensuite

$$(57) \qquad \cos^2\eta = \frac{\Pi}{A},$$

et l'on en tirera $\cos\eta$, mais non point l'angle $\eta$ lui-même, attendu que cet angle, étant généralement très-petit, ne saurait être donné avec précision par son cosinus.

De même, il faudra bien se garder généralement de déduire l'anomalie vraie, de l'équation de l'orbite, celle-ci ne pouvant la donner en fonction du rayon vecteur qu'au moyen de son cosinus; les anomalies voisines de 0 ou 180 degrés seraient mal déterminées par cette équation. Pour obvier à cet inconvénient, nous emploierons à la fois l'équation de l'orbite et la première équation (12) que nous écrirons comme il suit :

$$(58) \qquad E\sin V = \frac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{f\mu}}\frac{dr}{dt};$$

l'équation de l'orbite donne elle-même

$$(59) \qquad E\cos V = \frac{\Pi}{r} - 1.$$

On tire de ces deux équations, en divisant membre à membre,

$$(60) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{f\mu}}\dfrac{dr}{dt}}{\dfrac{\Pi}{r} - 1};$$

et l'on en déduit V, en prenant cet angle de manière que son sinus et son cosinus aient respectivement les signes des seconds membres des équations (58) et (59).

L'une ou l'autre de ces dernières donne E : on doit choisir celle qui contient la plus grande valeur absolue des deux quantités sin V et cos V; on a dès lors, pour déterminer $\eta$,

$$(61) \qquad \sin\eta = E.$$

Déduisant ensuite la valeur de $\cos\eta$, il faudra que cette valeur s'accorde avec celle que l'on aura tirée de l'équation (57).

L'anomalie excentrique sera fournie par l'équation

$$\text{(62)} \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}u = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}V}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)};$$

elle prend le signe de V.

L'anomalie moyenne de l'époque ou l'angle $\varepsilon - \varpi$ sera, en désignant ici par $t$ le nombre de jours écoulé depuis cette époque qui est entièrement arbitraire,

$$\text{(63)} \qquad \varepsilon - \varpi = u - \frac{E}{\sin 1''}\sin u - N'' t.$$

Il reste à calculer la longitude du périhélie. A cet effet, les équations (51) donnent

$$\operatorname{tang} v_1 = \frac{y}{x},$$

et l'on doit prendre $v_1$ de sorte que son sinus et son cosinus aient respectivement les signes de $y$ et de $x$; il vient ensuite

$$\text{(64)} \qquad \operatorname{tang}(v - \Omega) = \frac{\operatorname{tang}(v_1 - \Omega)}{\cos I}.$$

En faisant usage de cette formule, il faut choisir $(v - \Omega)$ de manière que l'équation

$$\text{(65)} \qquad \cos(v_1 - \Omega)\cos\lambda = \cos(v - \Omega)$$

soit satisfaite quant aux signes; c'est-à-dire que $\cos(v - \Omega)$ doit avoir le même signe que $\cos(v_1 - \Omega)$.

On a, pour calculer la distance du périhélie au nœud,

$$\text{(66)} \qquad \varpi - \Omega = v - \Omega - V;$$

ajoutant la longitude du nœud, on obtient celle du périhélie.

Si les longitudes $\alpha$ ou ☿ sont rapportées à l'équinoxe vrai de l'époque, $\varpi$ et Ω se trouveront aussi rapportées à l'équinoxe vrai; il conviendra d'en retrancher la nutation, afin que ces quantités puissent être comptées depuis l'équinoxe moyen. Enfin, si l'on choisit l'équinoxe moyen d'une autre époque, il faudra retrancher le mouvement de précession depuis cette époque.

*Formules ayant pour objet de déduire les dérivées de la longitude et de la latitude par rapport au temps, des éléments de l'orbite supposés donnés.*

**13.** La déduction de ces formules présente, d'après l'énoncé, le problème inverse de celui qui vient d'être résolu. Voici dans quel but nous allons nous occuper de sa solution. La méthode de calcul exposée dans les numéros précédents est encore propre à la correction des éléments; il suffit de corriger les quantités $\alpha$, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$, $\theta$ et $\frac{d\theta}{dt}$, et d'appliquer nos formules à ces quantités corrigées. Or, si la première approximation a été fournie par nos formules, rien n'est plus facile, puisque dès lors on a les valeurs primitives de ces dérivées; mais si les éléments ont été obtenus par un autre procédé, ou, plus généralement, si l'on ne connaît pas les valeurs des dérivées correspondantes à un système donné d'éléments et à une époque déterminée, il faut préalablement les déduire des éléments, pour pouvoir ensuite leur appliquer des corrections dont nous nous occuperons plus loin. Commençons donc par exposer cette déduction.

Nous supposerons les quantités $\alpha$ et $\theta$ calculées par les formules ordinaires et pour l'époque moyenne, ou à peu près telle, des observations dont on dispose; seulement, nous admettrons que pour tenir compte de l'action de la Lune sur la grandeur du rayon vecteur et les deux coordonnées angulaires héliocentriques de la Terre, l'on ait retranché, des coordonnées fournies par les éphémérides du Soleil, les quantités $\delta \mathfrak{P}$ et $\delta \log \mathrm{R}$, qui s'obtiendront ainsi qu'il suit :

Soient

R le rayon vecteur du centre de gravité de la Terre et de la Lune;

$\mathrm{R} + \delta\mathrm{R}$ le rayon vecteur terrestre;

$g$ la distance du centre de gravité de la Terre et de la Lune, au centre de la Terre;

P la parallaxe horizontale de la Lune exprimée en secondes;

$p''$ celle du Soleil aussi exprimée en secondes;

$\mathfrak{C}$ la longitude géocentrique de la Lune, $\Lambda$ sa latitude;

$m_1$ la masse de la Lune.

L'expression de la distance de la Lune à la Terre, en prenant pour unité la distance moyenne de la Terre au Soleil, sera

$$\frac{\mathrm{R}\sin p''}{\sin \mathrm{P}} = \frac{8'',58}{\mathrm{P}},$$

et l'on aura

$$g = \frac{m_1}{m' + m_1}\frac{8'',58}{\mathrm{P}}.$$

Si l'on se reporte actuellement à la *fig.* 2 (*Pl. III*) dans laquelle S, G, T et $T_1$ désignent respectivement les positions du Soleil, du centre de gravité de la Terre et de la Lune, le lieu de la Terre et la projection de ce dernier sur l'écliptique, on posera aisément les deux équations suivantes :

$$\sin \delta ☾ = \frac{g \cos A}{(R + \delta R)\cos ☾} \sin (☾ - ☉ + \delta ☾),$$

$$(R + \delta R)\cos ☾ \cos \delta ☾ = R + g \cos A \cos (☾ - ☉ + \delta ☾).$$

(Ici $\delta ☾$ est encore ce qu'il faudrait ajouter à la longitude héliocentrique du centre de gravité, pour obtenir celle du centre de la Terre). En négligeant les termes des ordres supérieurs au premier, divisant ensuite par R, et observant que

$$\delta \log R = 0,43429 \frac{\delta R}{R},$$

il vient

$$\delta \log R = 0,43429 . g \frac{\cos A}{R} \cos (☾ - ☉).$$

Substituons maintenant la valeur de $g$, remplaçons par l'unité les facteurs R et $\cos A$, ce qui n'introduira que des erreurs négligeables, et posons, pour abréger,

$$(67) \qquad a_1 = \frac{8'',58}{\sin 1''} \frac{m_1}{m' + m_1}, \quad a'_1 = 0,43429 . 8'',58 \frac{m_1}{m' + m_1};$$

nous aurons, en changeant les signes,

$$(68) \qquad \begin{cases} -\delta ☾ = -\dfrac{a_1}{P} \sin (☾ - ☉), \\ -\delta \log R = -\dfrac{a'_1}{P} \cos (☾ - ☉). \end{cases}$$

Les constantes $a_1$ et $a'_1$ prendront diverses valeurs, suivant celles que l'on attribuera au rapport $\frac{m_1}{m'}$ de la masse de la Lune à la masse de la Terre. Quoi qu'il en soit, il faudra se servir de celui qui aura été employé dans la construction de l'éphéméride.

En prenant $\frac{m_1}{m'} = \frac{1}{68,4}$, on trouve $\log a_1 = 4,4064$, $\log a'_1 = 8,7298$.

En prenant $\frac{m_1}{m'} = \frac{1}{86}$, on trouve $\log a_1 = 4,3083$, $\log a'_1 = 8,6317$.

Les coordonnées héliocentriques de la Terre ainsi corrigées, donneront les valeurs de $\alpha$ et $\theta$ relatives au centre de gravité de la Terre et de la Lune; et, quoique les observations ne se rapportent pas à ce lieu, il sera néanmoins possible, comme nous le verrons plus loin, d'obtenir les corrections de $\alpha$ et $\theta$, ainsi que de leurs dérivées, sans ramener les observations géocentriques à ce centre de gravité.

**14.** Nous omettrons pour le moment les formules qui servent au calcul de $\alpha$ et $\theta$; elles sont suffisamment connues. Dans leur application, il n'y aura d'autres précautions à prendre que celle indiquée ci-dessus relativement aux coordonnées héliocentriques de la Terre, et de ne point ajouter l'aberration à $\alpha$ et $\theta$. D'ailleurs, nous les reproduirons plus loin lorsque nous résumerons les formules à employer. Occupons-nous actuellement des dérivées.

Le calcul de $\alpha$ et de $\theta$ ayant conduit à déterminer les valeurs des quantités $r$, $r_1$, $v$, $v_1$ et $\lambda$, les trois coordonnées rectangulaires héliocentriques sont connues; elles ont pour expression

$$x = r_1 \cos v_1, \quad y = r_1 \sin v_1, \quad z = r_1 \operatorname{tang} \lambda = r \sin \lambda.$$

Les équations

$$\mathrm{N}t + \varepsilon - \varpi = u - \mathrm{E} \sin u,$$
$$r = \mathrm{A}(1 - \mathrm{E} \cos u),$$

étant différentiées par rapport au temps, donnent

$$\mathrm{N} = (1 - \mathrm{E} \cos u) \frac{du}{dt},$$
$$\frac{dr}{dt} = \mathrm{AE} \sin u \frac{du}{dt},$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \frac{dr}{dt} = \frac{\mathrm{AE} \sin u}{1 - \mathrm{E} \cos u} = \frac{\mathrm{A}^2 \mathrm{E}}{r} \sin u;$$

on a aussi

$$r = \mathrm{A} \sqrt{1 - \mathrm{E}^2} \frac{\sin u}{\sin \mathrm{V}},$$

et, par suite,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mathrm{NAE}}{\sqrt{1 - \mathrm{E}^2}} \sin \mathrm{V}.$$

Or de

$$\mathrm{A}^3 \mathrm{N}^2 = f\mu$$

on tire

$$\mathrm{A}^2 \mathrm{N}^2 = \frac{f\mu}{\mathrm{A}};$$

Ajoutons les mêmes équations en les multipliant, la première par $\cos\alpha$, et la seconde par $\sin\alpha$; nous aurons

$$\sin\alpha\frac{dy}{dt}+\cos\alpha\frac{dx}{dt}=\sin\alpha\frac{dy'}{dt}+\cos\alpha\frac{dx'}{dt}+\frac{d\rho}{dt}.$$

Au moyen des équations (11), les termes qui contiennent $\frac{dy'}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ dans les deux équations précédentes vont donner

$$\begin{aligned}\cos\alpha\frac{dy'}{dt}-\sin\alpha\frac{dx'}{dt}=&\quad(\sin\mathfrak{Z}\cos\alpha-\cos\mathfrak{Z}\sin\alpha)\frac{d\mathrm{R}}{dt}\\&+(\cos\mathfrak{Z}\cos\alpha+\sin\mathfrak{Z}\sin\alpha)\,\mathrm{R}\frac{d\mathfrak{Z}}{dt},\\\sin\alpha\frac{dy'}{dt}+\cos\alpha\frac{dx'}{dt}=&\quad(\sin\mathfrak{Z}\sin\alpha+\cos\mathfrak{Z}\cos\alpha)\frac{d\mathrm{R}}{dt}\\&+(\cos\mathfrak{Z}\sin\alpha-\sin\mathfrak{Z}\cos\alpha)\,\mathrm{R}\frac{d\mathfrak{Z}}{dt},\end{aligned}$$

et, à cause de la première équation (22),

$$\begin{aligned}\cos\alpha\frac{dy'}{dt}-\sin\alpha\frac{dx'}{dt}&=\sin\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt}+\mathrm{R}\cos\xi\frac{d\mathfrak{Z}}{dt},\\\sin\alpha\frac{dy'}{dt}+\cos\alpha\frac{dx'}{dt}&=\cos\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt}-\mathrm{R}\sin\xi\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}.\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs et transposant, il vient

$$\begin{aligned}-\rho\frac{d\alpha}{dt}&=\sin\alpha\frac{dx}{dt}-\cos\alpha\frac{dy}{dt}+\mathrm{R}\cos\xi\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}+\sin\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt},\\\frac{d\rho}{dt}&=\cos\alpha\frac{dx}{dt}+\sin\alpha\frac{dy}{dt}+\mathrm{R}\sin\xi\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}-\cos\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt}.\end{aligned}$$

Puis, si l'on met ici les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, et si l'on observe que les sinus et cosinus de $\alpha$ et $\nu_1$ se combinent de manière à donner des sinus et cosinus de la différence $\alpha-\nu_1$, on aura

$$(69)\quad\left\{\begin{aligned}-\rho\frac{d\alpha}{dt}&=\mathrm{R}\cos\xi\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}+\sin\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt}+\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}}\mathrm{E}\sin\mathrm{V}\cos\lambda\sin(\alpha-\nu_1)\\&\quad-\frac{\sqrt{f\mu}\sqrt{\Pi}}{r}\left[\sin\mathrm{I}\sin\lambda\cos(\nu_1-\Omega)\sin(\alpha-\nu_1)+\frac{\cos\mathrm{I}}{\cos\lambda}\cos(\alpha-\nu_1)\right],\\\frac{d\rho}{dt}&=\mathrm{R}\sin\xi\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}-\cos\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt}+\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}}\mathrm{E}\sin\mathrm{V}\cos\lambda\cos(\alpha-\nu_1)\\&\quad-\frac{\sqrt{f\mu}\sqrt{\Pi}}{r}\left[\sin\mathrm{I}\sin\lambda\cos(\nu_1-\Omega)\cos(\alpha-\nu_1)-\frac{\cos\mathrm{I}}{\cos\lambda}\sin(\alpha-\nu_1)\right].\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, la troisième équation (9), en y substituant la valeur de $\frac{dz}{dt}$, donne

$$(70)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -\tang\theta\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}}\,\mathrm{E}\sin\mathrm{V}\sin\lambda \\ \qquad\qquad + \dfrac{\sqrt{f\mu}\sqrt{\Pi}}{r}\sin\mathrm{I}\cos\lambda\cos(\nu_1 - \Omega). \end{array}\right.$$

Ces trois formules serviront au calcul de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, sans qu'il soit nécessaire de former d'autres valeurs que celles des coordonnées.

Les dérivées du deuxième ordre de $\alpha$ et $\rho$ seront tirées des équations (20), qui donnent

$$(71)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right) - 2\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt}, \\ \dfrac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}\cos\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right) + \rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} - \rho\dfrac{f\mu}{r^3}. \end{array}\right.$$

Quant à la valeur de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, il n'est pas indispensable de la former, puisqu'elle n'entre pas dans nos calculs; néanmoins, on pourra l'employer utilement à la vérification de la concordance des données fournies par l'observation. Les troisièmes équations (5) et (7) donnent à cet effet

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{f\mu}{r^3}\rho\tang\theta.$$

Substituant cette valeur dans la troisième équation (10), il viendra

$$(72)\quad -\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho\frac{f\mu}{r^3}\right) + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + 2\rho\tang\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Enfin la dérivée du troisième ordre en $\alpha$ sera tirée de l'équation (21) dans laquelle il suffira d'introduire la valeur de $\frac{dr}{dt}$ obtenue dans le présent numéro; on aura ainsi

$$(73)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho\dfrac{d^3\alpha}{dt^3} = \left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right)\left(\sin\xi\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{R}\cos\xi\dfrac{d\xi}{dt}\right) - 2\dfrac{d\alpha}{dt}\dfrac{d^2\rho}{dt^2} \\ \qquad\qquad - 3\,\mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^4}\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} - \dfrac{f\mu}{r^4}\dfrac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}}\,\mathrm{E}\sin\mathrm{V}\right) - 3\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}. \end{array}\right.$$

Les valeurs de $\alpha$, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$, $\theta$, $\frac{d\theta}{dt}$, ainsi que les coordonnées

héliocentriques de la Terre et leurs dérivées du premier ordre, étant calculées par les formules qui précèdent jointes aux deux équations (17), nous allons indiquer comment on corrigera les valeurs de $\alpha$, $\theta$ et de leurs dérivées fournies par des éléments donnés, ou ayant servi à obtenir ces éléments.

## *Correction des éléments de l'orbite.*

**15.** La première orbite approchée servira à construire une éphéméride des positions géocentriques apparentes de la planète. Je la suppose calculée suivant les procédés ordinaires, c'est-à-dire en corrigeant les coordonnées terrestres de manière à introduire le lieu vrai héliocentrique du centre de la Terre, et ajoutant ensuite l'aberration aux positions vraies de la planète. Ainsi, je n'entends pas que l'on doive appliquer à la construction de l'éphéméride, les formules qui serviraient à ramener les observations au centre de gravité de la Terre et de la Lune, comme cela serait nécessaire pour le calcul des éléments.

Ceci posé, soit $\chi$ l'excès des positions observées sur les positions de l'éphéméride auxquelles on aura ajouté la parallaxe suivant les cas. Considérons, par exemple, la longitude représentée par la série

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{d\alpha_0}{dt}\frac{t}{1} + \frac{d^2\alpha_0}{dt^2}\frac{t^2}{1.2} + \frac{d^3\alpha_0}{dt^3}\frac{t^3}{1.2.3} + \ldots,$$

et désignons par $\delta\alpha$ la correction que doit recevoir cette série, pour que les valeurs corrigées de $\alpha$ et de ses dérivées représentent les observations.

Je dis que les corrections à appliquer se déduiront de l'équation

$$\chi = \delta\alpha.$$

Cela serait évident, si l'on n'avait point à tenir compte de la différence entre les positions vraies, telles que les supposent nos formules, et les positions apparentes qui sont altérées, tant par l'aberration que par la distance qui sépare du centre de gravité de la Terre et de la Lune, le lieu de chaque observation. Pour nous assurer que nous avons bien établi la condition convenable, soient spécialement :

$\alpha_c$ la longitude calculée directement ou au moyen d'une éphéméride;

$\alpha$ la longitude vraie qui serait observée du centre de gravité de la Terre et de la Lune, comptée d'un équinoxe fixe;

$\alpha_T$ la longitude géocentrique vraie, comptée du même équinoxe;

$\omega$ la somme des termes qu'il faudrait ajouter à $\alpha$ pour passer à $\alpha_T$, de sorte que l'on ait

$$\alpha_T = \alpha + \omega;$$

l'expression de la longitude calculée sera

$$\alpha_c = \alpha_\tau + \text{précess.} + \text{nut.} + \text{aberr.} + \text{parall.}$$

Concevons que l'on fasse subir aux éléments ou constantes d'où dépend $\alpha$, de certaines variations peu considérables; on pourra admettre que les quantités $\odot$, aberr., parall., n'en seront pas sensiblement affectées: on aura alors

$$\delta\alpha_\tau = \delta\alpha,$$

$$\delta\alpha_c = \delta\alpha_\tau,$$

et, par suite,

$$\delta\alpha_c = \delta\alpha.$$

Or, si nous posons la condition

$$\alpha \text{ observé} = \alpha_c + \delta\alpha_c,$$

cette condition se réduira, en vertu des équations précédentes, à

$$\chi = \delta\alpha;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On tire de cette relation et du développement de $\alpha$,

$$(74) \qquad \chi = \delta\alpha_0 + \frac{t}{1}\delta\frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{t^2}{1.2}\delta\frac{d^2\alpha_0}{dt^2} + \frac{t^3}{1.2.3}\delta\frac{d^3\alpha_0}{dt^3} + \ldots.$$

Les calculs à effectuer consisteront donc dans le développement des excès en longitude et en latitude suivant les puissances du temps. Les valeurs de $\chi$ étant exprimées d'abord en secondes, on devra multiplier les valeurs obtenues de $\delta\frac{d\alpha_0}{dt}$, $\delta\frac{d^2\alpha_0}{dt^2}$, ..., par $\sin 1''$, afin de convertir les résultats en *rapports d'arc au rayon*. Si, ayant pris le jour solaire moyen pour unité de temps, on veut passer ensuite à l'unité qui donne $f\mu' = 1$, il faudra diviser par $k^m$, $m$ étant l'ordre de la dérivée dont on cherche la correction.

Les valeurs des corrections de $\alpha$, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$, $\theta$ et $\frac{d\theta}{dt}$ étant ajoutées aux valeurs de ces quantités calculées suivant les indications du numéro précédent, on procédera au calcul des éléments corrigés, en appliquant les formules (27), (28) et suivantes.

Nous devons faire remarquer l'avantage que présente notre mode de correction, lorsque l'orbite qui sert de point de départ est peu approchée. Les méthodes de correction, dans lesquelles on développe certaines fonctions des éléments suivant les puissances et les produits de leurs accroissements, en se bornant aux termes du premier ordre, ne peuvent être rationnellement

employées que dans le cas où les termes des ordres supérieurs sont négligeables, ce qui exige que les corrections soient elles-mêmes très-petites : or ce n'est pas le cas actuel ; on est alors obligé de renoncer à l'emploi de ces méthodes. Dans notre procédé, les corrections des dérivées se déduisent de l'interpolation, lors même que leurs valeurs primitives sont peu approchées. Le calcul, recommencé avec les valeurs corrigées, est plus court et plus exact que celui dans lequel on obtiendrait une première approximation avec des observations embrassant le même intervalle de temps; il est plus exact, puisque, dans la comparaison des observations avec les premiers éléments, on a tenu compte, au moins approximativement, des aberrations, parallaxes, termes lunaires, etc., que l'on était forcé de négliger d'abord.

## *Interpolation.*

16. Les procédés que nous avons exposés jusqu'ici pour la détermination des éléments des orbites des planètes ou leur correction, reposent sur l'emploi de formules d'interpolation propres à donner, en fonctions du temps, les valeurs des longitudes et latitudes, ou l'expression des différences que présentent les observations comparées aux éphémérides. Nous avons dit, au n° 1, comment le procédé d'interpolation indiqué par Laplace remplit mal le but de fournir des valeurs aussi approchées que possible des dérivées de la longitude et de la latitude. Nous avons dit également que, dans l'application de la méthode des moindres carrés à la détermination des coefficients des développements de ces quantités en séries ordonnées suivant les puissances du temps, on n'est guidé que par l'expérience dans le choix du nombre de termes à conserver. Les anciens procédés de résolution des équations de condition ne sauraient non plus être appliqués dans la circonstance actuelle; car les changements de signes qui y sont prescrits pour donner le même signe à tous les coefficients d'une même inconnue et sommer ensuite les équations, ne fourniraient ici que deux équations distinctes. Pour ces diverses raisons, nous croyons devoir recommander l'emploi des formules d'interpolation de M. Cauchy.

La méthode d'interpolation de l'illustre géomètre a été exposée, en ce qu'elle a de fondamental, dans le Journal de M. Liouville; mais son auteur n'avait pas donné les formules au moyen desquelles, après avoir fait l'élimination des diverses inconnues, on parvient à déduire les valeurs de chacune d'elles. En lisant un des Mémoires de M. Cauchy sur la détermination des orbites des planètes et des comètes, et fixant mon attention sur les procédés indiqués, *Comptes rendus,* tome XXV, page 409, pour obtenir les valeurs des inconnues, j'ai pu croire que M. Cauchy n'avait point établi de formules générales propres

à atteindre ce but. Frappé de l'existence de cette lacune, dans une théorie aussi importante, j'ai construit, de mon côté, les formules en question, et les ai présentées à l'auteur de la méthode. A l'inspection des formules, le savant académicien se rappela les avoir aussi obtenues et publiées, en 1835, dans un Recueil de travaux mathématiques qui s'imprime à Prague.

La nécessité d'avoir sous la main l'ensemble de ces formules, lorsqu'il s'agit de faire des applications, nous oblige à en présenter ici une démonstration succincte : nous suivrons la marche tracée dans le Journal de M. Liouville. Le développement prolongé des formules finales nous mettra dans l'obligation d'employer d'autres lettres pour désigner de certaines fonctions. Nous serons également obligés d'employer des mots particuliers, pour simplifier quelques énoncés relatifs à la manière dont on doit effectuer ou vérifier certaines sommes avec lesquelles se construisent les valeurs des inconnues.

## *Méthode d'interpolation de M. Cauchy.*

**17.** L'objet principal de la méthode d'interpolation de M. Cauchy est la détermination des constantes, avec la plus grande exactitude possible, dans les équations qui lient entre elles les variables dépendantes et indépendantes, au moyen d'un nombre quelconque de systèmes donnés des valeurs de ces variables, généralement supérieur à celui des constantes.

Le problème peut être ramené à celui de la résolution des équations linéaires ou du premier degré, lorsque l'on possède des valeurs approchées des inconnues; c'est ce que nous supposerons. De cette manière, la méthode de M. Cauchy trouve son application dans toute question de mécanique, de physique, d'astronomie, etc., où l'on se propose, tout en partant de la théorie mathématique et des observations d'un phénomène, de fixer les constantes ou coefficients numériques des équations qui le définissent ou le représentent. Cette méthode peut dès lors être considérée comme étant l'une des bases essentielles de la partie de la science générale, que l'on nomme *Mathématiques appliquées*.

Nous avons dit que le problème peut être ramené à la résolution des équations linéaires (*). Soient, en effet : $\xi$, $\upsilon$, $\zeta$,..., $t$ des variables indépendantes; $a$, $b$, $c$,... des constantes ou paramètres; et $x$, $y$, $z$... des fonctions des quantités précédentes : de sorte qu'en désignant par F, $F_1$, $F_2$,... des fonctions de $x$, $y$, $z$,...; $a$, $b$, $c$,...; $\xi$, $\upsilon$, $\zeta$,..., $t$, l'on ait les équations

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \tag{75}$$

en nombre égal à celui des fonctions $x$, $y$, $z$,...; il pourra arriver que ces

(*) Si les équations à résoudre sont linéaires, on peut immédiatement passer au n° 18.

équations soient résolubles par rapport à $x$, $y$, $z$, ..., auquel cas on en tirerait

$$x = f, \quad y = f_1, \quad z = f_2, \ldots, \tag{76}$$

$f, f_1, f_2, \ldots$, désignant des fonctions explicites des constantes $a$, $b$, $c$, ..., et des variables indépendantes $\xi$, $\upsilon$, $\zeta$, ..., $t$.

Si, dans les équations (76), on considère les quantités $x$, $y$, $z$, ..., comme fournies par les observations, les valeurs approchées des constantes $a$, $b$, $c$, .., ne satisferont point généralement à ces équations; mais en faisant varier les constantes, de quantités inconnues $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$, ..., et désignant par $\delta f$ la variation correspondante de $f$, on posera l'équation

$$x = f + \delta f,$$

que l'on mettra sous la forme

$$x - f = \delta f,$$

de sorte que le premier membre de celle-ci désignera l'excès de l'observation sur la valeur calculée de $x$; cet excès sera un nombre donné.

Les valeurs de $\delta f$, $\delta f_1$, $\delta f_2$, ..., étant supposées très-petites, et leurs développements réduits aux termes du premier ordre, on aura les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x - f = \dfrac{df}{da}\delta a + \dfrac{df}{db}\delta b + \dfrac{df}{dc}\delta c + \ldots, \\ y - f_1 = \dfrac{df_1}{da}\delta a + \dfrac{df_1}{db}\delta b + \dfrac{df_1}{dc}\delta c + \ldots, \\ z - f_2 = \dfrac{df_2}{da}\delta a + \dfrac{df_2}{db}\delta b + \dfrac{df_2}{dc}\delta c + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{77}$$

Chaque système de valeurs $x$, $y$, $z$, ..., $\xi$, $\upsilon$, $\zeta$, ..., $t$, donnera un pareil système d'équations linéaires.

En second lieu, supposons que l'on ne puisse obtenir les expressions analytiques de $x$, $y$, $z$, ..., mais que, néanmoins, étant données des valeurs approchées de $a$, $b$, $c$, ..., on soit parvenu, au moyen de tâtonnements, à obtenir les valeurs correspondantes de $x$, $y$, $z$, ..., qui satisfont aux équations (75); ces quantités ne coïncideront pas, généralement, avec les valeurs observées. Mais en différentiant les équations (75) successivement par rapport aux constantes $a$, $b$, $c$, ..., on obtiendra, pour chaque système de valeurs de $x$, $y$, $z$, ..., les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\mathrm{F}}{da} + \dfrac{d\mathrm{F}}{dx}\dfrac{dx}{da} + \dfrac{d\mathrm{F}}{dy}\dfrac{dy}{da} + \ldots = 0; \quad \dfrac{d\mathrm{F}}{db} + \dfrac{d\mathrm{F}}{dx}\dfrac{dx}{db} + \dfrac{d\mathrm{F}}{dy}\dfrac{dy}{db} + \ldots = 0; \quad \text{etc.} \\ \dfrac{d\mathrm{F}_1}{da} + \dfrac{d\mathrm{F}_1}{dx}\dfrac{dx}{da} + \dfrac{d\mathrm{F}_1}{dy}\dfrac{dy}{da} + \ldots = 0; \quad \dfrac{d\mathrm{F}_1}{db} + \dfrac{d\mathrm{F}_1}{dx}\dfrac{dx}{db} + \dfrac{d\mathrm{F}_1}{dy}\dfrac{dy}{db} + \ldots = 0; \quad \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{78}$$

dans lesquelles les premiers termes désignent les dérivées partielles des fonctions F, $F_1$,..., prises par rapport aux constantes $a$, $b$,..., contenues explicitement dans ces fonctions. On en tirera les valeurs des dérivées partielles $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \cdots, \frac{dy}{da}, \frac{dy}{db}, \cdots$, etc.; et l'on aura, en procédant comme plus haut, les équations suivantes, pour déterminer les inconnues $\delta a, \delta b, \delta c, \ldots$ :

$$(79)\qquad \begin{cases} x \text{ obs.} - x \text{ calc.} = \frac{dx}{da}\delta a + \frac{dx}{db}\delta b + \frac{dx}{dc}\delta c + \ldots, \\ y \text{ obs.} - y \text{ calc.} = \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + \frac{dy}{dc}\delta c + \ldots, \\ z \text{ obs.} - z \text{ calc.} = \frac{dz}{da}\delta a + \frac{dz}{db}\delta b + \frac{dz}{dc}\delta c + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les équations à résoudre peuvent donc généralement être ramenées à la forme linéaire.

18. Considérons l'équation

$$(80)\qquad y = aA + bB + cC + dD + \ldots,$$

dans laquelle $a$, $b$, $c$, $d$,... désignent des constantes inconnues, et A, B, C, D,... des fonctions données d'un nombre quelconque de variables. Dans le cas où les équations primitives du problème auront la forme (80), $y$ sera une fonction dont la valeur est censée fournie par l'observation; et le problème consistera à déterminer les valeurs des constantes $a$, $b$, $c$,..., au moyen d'un grand nombre de systèmes donnés de valeurs de $y$, A, B, C....

Si la solution du problème est amenée à dépendre d'équations de la forme (77) ou (79), la quantité $y$ représentera ici l'excès de l'$y$ observé sur l'$y$ calculé; les fonctions A, B, C,... seront égales aux dérivées partielles $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}, \frac{dy}{dc}, \ldots$, tandis que $a$, $b$, $c$,... désigneront les corrections $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$,.... Il importe de remarquer que, dans tous les cas, les erreurs des observations porteront sur les valeurs de $y$. Ce que nous disons des fonctions $y$ s'applique évidemment aux fonctions $x$, $z$,....

Ceci posé, nous allons procéder à la résolution d'un système d'équations de la forme (80), d'après la méthode de M. Cauchy. Réduisons, pour un moment, le second membre à son premier terme, nous aurons

$$(81)\qquad y = aA:$$

chaque système de valeurs de $y$ et de A pourrait fournir une valeur de l'in-

connue $a$; mais, à cause des erreurs des données, ces différentes valeurs ne seraient pas identiques. Pour employer toutes les données à la détermination de la valeur de $a$, multiplions chaque équation de la forme précédente, par un coefficient indéterminé $k$ particulier à chacune d'elles. En faisant la somme $\Sigma$ de toutes les équations ainsi modifiées, et tirant ensuite la valeur de $a$, il viendra

$$a = \frac{\Sigma k y}{\Sigma k \mathrm{A}}. \tag{82}$$

Nous pouvons, sans altérer la valeur de $a$, supposer que l'on divise tous les facteurs $k$ par celui d'entre eux qui a la plus grande valeur absolue, et laisser la lettre $k$ pour désigner le résultat de la division; la valeur maximum de $k$ sera dès lors égale à l'unité.

Soient $y'$ l'erreur inconnue de $y$, et Y la véritable valeur de cette fonction, de sorte que l'on ait

$$y = \mathrm{Y} + y';$$

la substitution de cette valeur donnera

$$a = \frac{\Sigma k \mathrm{Y}}{\Sigma k \mathrm{A}} + \frac{\Sigma k y'}{\Sigma k \mathrm{A}};$$

le premier terme du second membre sera égal à la véritable valeur de $a$, et le second terme représentera l'erreur de cette quantité calculée par la formule (82). Il s'agit de rendre ce second terme un minimum : on y parviendra, si l'on dispose des indéterminées $k$, de manière à rendre son dénominateur un maximum, et si les valeurs de $k$ qui satisfont à cette condition rendent en même temps le numérateur un minimum. Or nous avons vu que l'on peut supposer le maximum de $k$ égal à l'unité; il est clair, dès lors, que le dénominateur atteindra son maximum, si l'on donne à $k$ le signe de A, afin que tous les termes prennent le même signe, et si, de plus, on donne au facteur $k$ sa valeur absolue maximum, qui est l'unité. M. Cauchy démontre que cette circonstance tend à rendre le numérateur un minimum.

La théorie de la compensation des erreurs également possibles, ou des moyennes arithmétiques, va nous fournir une autre manière de nous rendre compte de ce résultat. En effet, la condition qui vient d'être trouvée pour le maximum du dénominateur, consiste à faire $k$ égal à $+1$ ou $-1$, suivant que la valeur correspondante de A est positive ou négative : désignons par $y'_{+1}$, $y'_{-1}$ les valeurs de $y'$ correspondantes aux valeurs positives et négatives de A; le numérateur $\Sigma k y'$ pourra s'écrire $\Sigma y'_{+1} - \Sigma y'_{-1}$, et se composera ainsi de deux groupes distincts de valeurs de $y'$. Or, si nous supposons que les valeurs $y'$ de chaque groupe soient assez nombreuses pour que leur somme algébrique approche d'être nulle par une compensation des

erreurs, il est visible qu'il n'en saurait généralement être ainsi, dans le cas où les $y'$ seraient affectés de coefficients ayant des valeurs inégales. Cette conclusion suppose qu'il n'existe aucune relation particulière entre les différentes valeurs de $y'$. Le facteur $k$ doit donc être pris égal à $\pm 1$, dans les sommes $\Sigma$, suivant que les valeurs correspondantes de A seront positives ou négatives.

Afin de simplifier les énoncés, nous nommerons somme *subordonnée* à A, par exemple, une somme de valeurs correspondantes à des valeurs données de A, faite en changeant les signes de toutes celles qui répondent à des valeurs négatives de A : en désignant par S une semblable somme, on voit que SA se compose de la somme des valeurs absolues de la fonction A. Nous désignerons en outre la fonction A, qui règle les changements de signe à opérer dans les autres fonctions, par la dénomination de *dominante*. Dans ce qui va suivre, plusieurs fonctions joueront successivement le rôle de *dominante;* et pour éviter la confusion des notations, les sommes *subordonnées* à d'autres *dominantes* seront notées S', S'', S''', etc.

En vertu de ces conventions, l'équation (82) donnera

$$a = \frac{Sy}{SA}. \tag{83}$$

Avant d'aller plus loin, nous rappellerons que cette manière de procéder suppose les fonctions $y$ affectées d'erreurs de même nature ou également possibles. Ainsi, en admettant que les équations en $y$ soient assez nombreuses, on pourrait tirer de leur résolution, les valeurs des inconnues $a, b, c, \ldots$. Le même mode, appliqué à des fonctions $x, z, \ldots$, supposées d'une autre nature que $y$, donnerait autant de nouvelles valeurs de $a, b, c, \ldots$, que l'on considérerait d'espèces distinctes de fonctions $x, z, \ldots$; la concordance des valeurs des inconnues serait une preuve de l'exactitude de la théorie et de la précision des observations. En astronomie, la fonction $y$ pourrait désigner successivement les ascensions droites et les déclinaisons, ou leurs différences avec le calcul : les valeurs des inconnues seraient fournies, d'un côté, par les premières; de l'autre, par les secondes. Au lieu de chercher à obtenir deux systèmes dans ce cas, on peut traiter simultanément les équations exprimant les erreurs en ascension droite et en déclinaison, en multipliant celles en ascension droite par le cosinus de la déclinaison correspondante. De cette manière, on rend comparables les deux espèces d'erreurs, et l'on peut traiter simultanément les équations qui se rapportent aux unes et aux autres. On voit que l'on s'écarterait de l'esprit de la méthode, si l'on se proposait d'embrasser, dans une opération unique, les fonctions ou erreurs de fonctions de nature différente, sans les avoir préalablement rendues compa-

rables, par l'introduction de facteurs destinés à remplir le même rôle que les poids, dans les équations où l'on n'envisage que des observations de même nature, mais de précision inégale. Nous pourrons donc, dans ce qui va suivre, supposer tous les termes de chaque équation de la forme (80) multipliés par de certains facteurs $n'$ qui, dans les cas où les fonctions $y$ seront d'une espèce unique, se réduiront aux poids des observations.

19. Sous les restrictions qui précèdent, nous allons poursuivre les calculs. Substituons la valeur (83) dans l'expression (81); il viendra

$$y = \frac{A}{SA} Sy.$$

Posons maintenant

$$\alpha = \frac{A}{SA}, \tag{84}$$

puis désignons par $\Delta y$ la correction que doit subir la valeur de $y$, obtenue en ne tenant compte que du premier terme de la suite (80), pour avoir égard aux termes qui le suivent; nous aurons

$$y = \alpha Sy + \Delta y. \tag{85}$$

Il s'agit actuellement de substituer aux équations de la forme (80) de nouvelles équations d'où l'inconnue $a$ ait disparu, ou d'éliminer cette quantité. Pour cela, changeons de signe celles des équations de la forme (80) où le coefficient A serait négatif, et faisons leur somme; il viendra, en vertu des conventions établies relativement aux sommes *subordonnées*,

$$Sy = a\,SA + b\,SB + c\,SC + d\,SD + \ldots. \tag{86}$$

Multiplions cette équation par $\alpha$ et retranchons membre à membre de l'équation (80); nous aurons

$$y - \alpha Sy = a(A - \alpha SA) + b(B - \alpha SB) + c(C - \alpha SC) + d(D - \alpha SD) + \ldots.$$

Or le coefficient de $a$ est nul en vertu de l'équation (84), et l'équation (85) donne

$$\Delta y = y - \alpha Sy; \tag{87}$$

si nous posons d'ailleurs

$$\Delta B = B - \alpha SB, \quad \Delta C = C - \alpha SC, \quad \Delta D = D - \alpha SD, \ldots, \tag{88}$$

la précédente deviendra

$$\Delta y = b\,\Delta B + c\,\Delta C + d\,\Delta D + \ldots, \tag{89}$$

de sorte que chaque équation en $y$ sera remplacée par une équation telle que celle-ci, et contenant une inconnue de moins. Il est bon de noter que $\Delta y$ est l'excès de la valeur observée de $y$, sur son expression limitée au premier terme du second membre de l'équation (80).

L'équation (89) étant de même forme que la proposée (80), on peut lui appliquer les mêmes raisonnements, ou se contenter d'en déduire, par comparaison, les résultats suivants :

Désignant par S′ les sommes *subordonnées* à $\Delta B$, on posera

$$\beta = \frac{\Delta B}{S'\Delta B}, \tag{90}$$

d'où

$$S'\Delta y = bS'\Delta B + cS'\Delta C + dS'\Delta D + \ldots; \tag{91}$$

l'on aura ensuite

$$\Delta^2 y = \Delta y - \beta S'\Delta y, \quad \Delta^2 C = \Delta C - \beta S'\Delta C, \quad \Delta^2 D = \Delta D - \beta S'\Delta D, \ldots, \tag{92}$$

et les équations résultant de l'élimination de $b$ seront de la forme

$$\Delta^2 y = c\Delta^2 C + d\Delta^2 D + \ldots. \tag{93}$$

$\Delta^2 y$ exprimera d'ailleurs l'excès de la valeur observée de $y$, sur son expression limitée aux deux premiers termes du deuxième membre de (80).

Procédant toujours de la même manière, et désignant par S″ les sommes *subordonnées* à $\Delta^2 C$, on aura successivement

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{\Delta^2 C}{S''\Delta^2 C}, \\ S''\Delta^2 y = cS''\Delta^2 C + dS''\Delta^2 D + \ldots, \\ \Delta^3 y = \Delta^2 y - \gamma S''\Delta^2 y, \quad \Delta^3 D = \Delta^2 D - \gamma S''\Delta^2 D, \ldots, \end{array}\right. \tag{94}$$

et, pour résultat de l'élimination de $c$,

$$\Delta^3 y = d\Delta^3 D + \ldots, \tag{95}$$

équation dont le premier membre exprime l'excès de la valeur observée de $y$, sur son expression limitée aux trois premiers termes du second membre de l'équation (80).

On peut, de la sorte, éliminer toutes les inconnues, et l'on parviendra à un reste $\Delta^\nu y$ qui exprimera l'excès de chaque $y$ observé, sur sa valeur donnée par le second membre de l'équation (80) supposé contenir $\nu$ termes.

Au moyen des relations établies entre $y$ et $\Delta y$, $\Delta y$ et $\Delta^2 y, \ldots$, il est aisé, par de simples substitutions, de construire la valeur générale de $y$ qui prend

la forme

$$(96) \qquad y = \alpha \mathrm{S}y + \beta \mathrm{S}'\Delta y + \gamma \mathrm{S}''\Delta^2 y + \ldots + \Delta^\nu y.$$

**20.** La nature particulière des sommes qui concourent aux résultats précédents offre de nombreuses vérifications numériques des différences $\Delta$, $\Delta^2$, $\Delta^3$,...; ces vérifications reposent sur les deux propositions suivantes :

1°. Les sommes des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,..., *subordonnées* aux fonctions qui forment les numérateurs de leurs expressions, sont toutes égales à l'unité;

2°. Les sommes des fonctions quelconques, *subordonnées* à des *dominantes* qui précèdent, dans l'ordre des calculs, celles auxquelles on doit les subordonner dans l'application des formules ci-dessus, sont égales à zéro.

Pour reconnaître l'exactitude de la première proposition, il suffit de remarquer que les dénominateurs des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,..., sont des sommes déterminées; considérant, par exemple,

$$\gamma = \frac{\Delta^2 \mathrm{C}}{\mathrm{S}''\Delta^2 \mathrm{C}},$$

on aura

$$\mathrm{S}''\gamma = \frac{1}{\mathrm{S}''\Delta^2 \mathrm{C}} \mathrm{S}''\Delta^2 \mathrm{C} = 1;$$

il en est de même, évidemment, pour toutes les autres fonctions de cette espèce. Donc

$$(97) \qquad \mathrm{S}\alpha = 1, \quad \mathrm{S}'\beta = 1, \quad \mathrm{S}''\gamma = 1, \ldots.$$

Quant à la seconde proposition, nous trouverons d'abord, en vertu de l'équation (87),

$$\mathrm{S}\Delta y = \mathrm{S}y - \mathrm{S}y\,\mathrm{S}\alpha = \mathrm{S}y(1 - \mathrm{S}\alpha) = 0;$$

on a donc

$$(98) \qquad \mathrm{S}\Delta y = 0, \quad \mathrm{S}\Delta \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{S}\Delta \mathrm{C} = 0, \quad \mathrm{S}\Delta \mathrm{D} = 0, \ldots.$$

Poursuivant,

$$\mathrm{S}\beta = \frac{\mathrm{S}\Delta \mathrm{B}}{\mathrm{S}'\Delta \mathrm{B}} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{S}\Delta^2 y = 0, \quad \mathrm{S}\Delta^2 \mathrm{C} = 0, \quad \mathrm{S}\Delta^2 \mathrm{D} = 0, \ldots.$$

En vertu de ces relations, il vient encore

$$\mathrm{S}\gamma = 0, \quad \mathrm{S}\Delta^3 y = 0, \quad \mathrm{S}\Delta^3 \mathrm{D} = 0, \ldots,$$

etc.

Considérons les sommes S', nous aurons

$$\mathrm{S}'\Delta^2 y = \mathrm{S}'\Delta y - \mathrm{S}'\Delta y\,\mathrm{S}'\beta = \mathrm{S}'\Delta y(1 - \mathrm{S}'\beta) = 0,$$

et, généralement,

$$S'\Delta^2 y = 0, \quad S'\Delta^2 C = 0, \quad S'\Delta^2 D = 0, \ldots, \tag{99}$$

puis ensuite

$$S'\gamma = 0, \quad S'\Delta^3 y = 0, \quad S'\Delta^3 D = 0, \ldots; \text{ etc.}$$

Les sommes S″ conduiraient à

$$S''\Delta^3 y = 0, \quad S''\Delta^3 D = 0, \ldots; \text{ etc.} \tag{100}$$

La seconde proposition est donc démontrée.

Les vérifications fournies par la première proposition ne servent guère lorsqu'on emploie les logarithmes, attendu qu'elles exigeraient le passage aux nombres, et pour cet objet seulement; d'ailleurs, il est plus commode de ne pas faire usage des facteurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... Ayant, par exemple, à calculer les termes $-\alpha Sy$, $-\alpha SB$, $-\alpha SC$, $-\alpha SD, \ldots$, on partira du logarithme de A, auquel on ajoutera celui de $-\frac{Sy}{SA}$; au résultat, on ajoutera le logarithme de $\frac{SB}{Sy}$: en ajoutant de la même manière les logarithmes des facteurs $\frac{SC}{SB}$, $\frac{SD}{SC}$, on fera dépendre le logarithme du dernier terme, de tous ceux qui le précèdent, de sorte qu'en calculant ensuite ce dernier terme directement par son expression $-A\frac{SD}{SA}$, et comparant, on vérifiera l'ensemble des logarithmes de tous les autres.

Les vérifications fournies par la seconde proposition sont d'un usage très-commode : lorsqu'en suivant l'ordre des calculs, on est sur le point de *subordonner* une somme par rapport à une certaine *dominante,* il convient d'effectuer préalablement, au moyen de la fonction que l'on considère, une somme *subordonnée* à la *dominante* qui précède immédiatement. De cette manière, il est presque impossible qu'il se glisse des erreurs, sans que l'on s'en aperçoive sur-le-champ. Si l'on n'est pas suffisamment rassuré par cette épreuve, on peut subordonner à d'autres *dominantes* précédentes.

**21**. Les résultats présentés dans les n$^{os}$ **18**, **19** et **20** renferment à peu près l'exposé de la méthode de M. Cauchy, inséré dans le Journal de M. Liouville. Il reste à construire les valeurs des inconnues, au moyen des sommes *subordonnées* qui viennent d'être obtenues.

Reportons-nous aux équations (88), et posons, pour plus de symétrie,

$$1 = \alpha_0 SA, \tag{101}$$

et pourra être considérée comme fournissant des valeurs suff… de la fonction $y$, lorsque ces valeurs seront renfermées dans le… nées; mais elle ne pourrait être employée avec sécurité ho… Néanmoins, il est utile, dans beaucoup de cas, de donner à … une forme telle, que, tout en conservant la propriété de repré… données, elle puisse encore représenter des valeurs de la fonct… de celles-ci. On y parvient en exprimant les coefficients $a$, … fonctions de ceux des coefficients qu'il est impossible de déterm… des données. Ces derniers restent indéterminés; mais leurs va… être fixées ensuite, par la condition de satisfaire à de certaines r… allons procéder à la construction des coefficients $a$, $b$, $c$, …, … d'une partie de ces mêmes coefficients. Les formules établies r… un cas particulier, montreront suffisamment comment il faudrai… pour qu'elles conviennent à tout autre cas.

Supposons, par exemple, que la série des $\Delta^3 y$ ne manifeste … que les signes de ces restes présentent de nombreuses alternances, … leurs valeurs absolues soient de l'ordre de grandeur des erreurs d… Nous ferons $\nu = 3$; les coefficients de A, B, C, …, dans l'équa… seront limités aux termes en $S''\Delta^2 y$, de sorte que, en les désigna… $b_0$, $c_0$, ils auront pour expressions

$$(109)\qquad \begin{cases} a_0 = \alpha_0 Sy + \beta_0 S'\Delta y + \gamma_0 S''\Delta^2 y, \\ b_0 = \beta_1 S'\Delta y + \gamma_1 S''\Delta^2 y, \\ c_0 = \gamma_2 S''\Delta^2 y. \end{cases}$$

D'un autre côté, nous avons trouvé, équation (95),

$$(110)\qquad \Delta^3 y = d\Delta^3 D + e\Delta^3 E + \ldots.$$

Cette équation présente, entre les données et les indéterminées $d$, … une relation propre à fournir des limites de celles-ci. Il faudra, en… qu'étant appliquée à chacun des restes $\Delta^3 y$, elle ne donne pas lieu à u… férence entre ses deux membres, qui excède les erreurs des observation…

Il s'agit maintenant de transformer le second membre de l'équation (… pour cela, remontons aux développements de $\Delta D$ et $\Delta^2 D$, obtenus da… numéro précédent : en les étendant à $\Delta^3 D$, on aurait

$$\Delta^3 D = D - \alpha_0 A SD - (\beta_0 A + \beta_1 B) S'\Delta D - (\gamma_0 A + \gamma_1 B + \gamma_2 C) S''\Delta^2 D …$$

on trouverait, pareillement,

$$\Delta^3 E = E - \alpha_0 A SE - (\beta_0 A + \beta_1 B) S'\Delta E - (\gamma_0 A + \gamma_1 B + \gamma_2 C) S''\Delta^2 E; …$$

etc.

$\epsilon, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, de l'équatio

| | | |
|---|---|---|
| $SD$ | $\Delta E = E - \alpha SE$ | etc. |
| $S'\Delta D$ | $\Delta^2 E = \Delta E - \beta S'\Delta E$ | etc. |
| $S''\Delta^2 D$ | $\Delta^3 E = \Delta^2 E - \gamma S''\Delta^2 E$ | etc. |
| | $\Delta^4 E = \Delta^3 E - \delta S'''\Delta^3 E$ | etc. |
| | | etc. |

our vérifier l'exactitude des valeurs ol

| | | | |
|---|---|---|---|
| $^{1} = 0$ | $S'''\delta = 1,$ | $S'''\Delta^1 = 0$ | $S^{IV}$ |
| $= 0$ | $S''\delta = 0,$ | $S''\Delta^1 = 0$ | $S'''\varepsilon$ |
| $= 0$ | $S'\delta = 0,$ | $S'\Delta^1 = 0$ | $S''\varepsilon$ |
| | $S\delta = 0,$ | $S\Delta^1 = 0$ | $S'\varepsilon$ |
| | | | $S\varepsilon$ |

$$S'''\Delta^4 = 0,$$

$\varepsilon_1; \ldots$, *par voie de dérivation.*

| | |
|---|---|
| $\delta_3 S'''\Delta^3 D$ | $1 = \delta_3 S$ |
| $\delta_2 S'''\Delta^3 E + \varepsilon_2 S^{IV}\Delta^4 E$ | $0 = \delta_3 S$ |
| $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ | $\ldots\ldots$ |

dice :

| | |
|---|---|
| $\delta_3 \Sigma S'''\Delta^3 + \varepsilon_2 \Sigma S^{IV}\Delta^4 + \ldots$ | $1 = \delta_3$ |

$$\delta_2 S''\Delta^3\gamma + \varepsilon_2 S^{IV}\Delta^4\gamma + \ldots \quad | \quad d = \delta_3$$

$$+ \delta_3) S'''\Delta^3\gamma + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

---

ns les valeurs de A que des autres fonctions
B; et ainsi du reste. La fonction A est dite
ondent aux valeurs nulles de la *dominante*.

*Connais*

Ayant substitué ces valeurs dans l'expression (110), et ordonné par rapport à A, B, C; si l'on pose ensuite

$$(111)\quad \begin{cases} a_1 = (\alpha_0 \mathrm{SD} + \beta_0 \mathrm{S}'\Delta\mathrm{D} + \gamma_0 \mathrm{S}''\Delta^2\mathrm{D})\,d \\ \qquad + (\alpha_0 \mathrm{SE} + \beta_0 \mathrm{S}'\Delta\mathrm{E} + \gamma_0 \mathrm{S}''\Delta^2\mathrm{E})\,e \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_1 = (\beta_1 \mathrm{S}'\Delta\mathrm{D} + \gamma_1 \mathrm{S}''\Delta^2\mathrm{D})\,d \\ \qquad + (\beta_1 \mathrm{S}'\Delta\mathrm{E} + \gamma_1 \mathrm{S}''\Delta^2\mathrm{E})\,e \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_1 = \gamma_2 \mathrm{S}''\Delta^2\mathrm{D}.d \\ \qquad + \gamma_2 \mathrm{S}''\Delta^2\mathrm{E}.e \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

il viendra

$$\Delta^3 y = -a_1 \mathrm{A} - b_1 \mathrm{B} - c_1 \mathrm{C} + d\mathrm{D} + e\mathrm{E} + \ldots,$$

et la valeur (108) de $y$ prendra la forme

$$y = (a_0 - a_1)\mathrm{A} + (b_0 - b_1)\mathrm{B} + (c_0 - c_1)\mathrm{C} + d\mathrm{D} + e\mathrm{E} + \ldots.$$

Enfin, la comparaison de cette expression avec la proposée (80) donne

$$(112)\qquad a = a_0 - a_1, \quad b = b_0 - b_1, \quad c = c_0 - c_1.$$

Les valeurs des coefficients $a$, $b$, $c$ sont, comme on le voit, formées des parties connues $a_0$, $b_0$, $c_0$ (109), et des parties indéterminées provenant des termes en $d$, $e$, . . ., qui constituent les valeurs de $a_1$, $b_1$, $c_1$ (111).

L'inspection des formules (109) et (111) relatives à $\nu = 3$, montre suffisamment comment on formerait les quantités $a_0$, $b_0$, $c_0$, ..., dans le cas où $\nu$ aurait une valeur différente. Ces coefficients seraient d'abord en nombre égal à l'indice $\nu$ de la série des différences $\Delta^\nu y$ où commencent à se manifester l'absence de toute loi et les alternances de signe : le premier d'entre eux serait formé d'un nombre de termes aussi égal à $\nu$, et les autres en dériveraient, suivant le mode indiqué par les équations (109). Quant aux coefficients $a_1$, $b_1$, $c_1$, . . ., les équations (111) montrent qu'ils se déduiront de $a_0$, $b_0$, $c_0$, . . ., en changeant successivement dans ces derniers, $y$ en H, I, K, ..., et affectant chacun des résultats ainsi obtenus, des facteurs $h$, $i$, $k$, . . .; ces dernières quantités désignant d'ailleurs celles qui viennent après les $\nu$ premières de la série $a$, $b$, $c$, . . . .

Les formules (109), (110), (111) et (112) nous ont été d'un grand secours dans nos recherches sur les étoiles doubles.

23. Nous allons maintenant présenter, en un tableau, les formules obtenues dans les numéros précédents, et qui résument la méthode d'interpolation de M. Cauchy.

## *Application de la méthode d'interpolation de M. Cauchy, au développement des longitude et latitude géocentriques suivant les puissances du temps.*

**24.** Les fonctions $y$, A, B, C, ..., sont, avons-nous dit, des fonctions quelconques d'une ou plusieurs variables. Dans le problème astronomique dont nous nous occupons, ces quantités sont des fonctions d'une variable unique, le temps; la première de ces fonctions représente la longitude ou la latitude, les autres désignent les puissances ascendantes du temps. En effet, la forme du développement de la longitude ou de la latitude est

$$y = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + \ldots; \tag{113}$$

il s'ensuit que l'on a

$$\mathrm{A} = 1, \quad \mathrm{B} = t, \quad \mathrm{C} = t^2, \quad \mathrm{D} = t^3, \quad \mathrm{E} = t^4, \ldots. \tag{114}$$

Il n'y aurait aucun avantage à substituer les quantités $t$, $t^2$, $t^3$, $t^4$, ..., à la place de B, C, D, E, ..., dans les formules du tableau précédent. Les exposants de $t$, mis en présence des indices des sommes S et des différences $\Delta$, auraient pour effet de rendre les formules plus difficiles à lire, et n'apporteraient, du reste, aucune simplification au calcul numérique.

Lorsqu'on suppose généralement le développement de $y$ ordonné suivant les puissances d'une seule variable, comme nous le faisons ici, il se présente une circonstance dans laquelle les formules du tableau précédent, qui se rapportent uniquement à la variable ou sont indépendantes de $y$, peuvent être réduites en Tables numériques calculées une fois pour toutes. Cette circonstance a lieu lorsque les valeurs données de la variable sont équidifférentes. Dans le cas où elles sont en nombre impair, on peut prendre pour origine de cette variable le milieu de ses valeurs extrêmes; et si l'on substitue à l'unité qui lui sert de mesure, l'intervalle qui sépare ses diverses valeurs, on n'a besoin de calculer ces Tables, que pour des nombres de données, égaux à 3, 5, 7, 9, etc. On calculerait également des Tables pour le cas de nombres pairs.

Ces Tables étant ainsi préparées, le seul calcul que l'on aurait à effectuer serait celui des différences $\Delta y$, $\Delta^2 y$, ..., et des sommes $\mathrm{S}y$, $\mathrm{S}'\Delta y$, $\mathrm{S}''\Delta^2 y$ ..., au moyen de quoi les valeurs des inconnues s'obtiendraient immédiatement.

M. Cauchy a présenté l'exemple d'un tableau de cette espèce, pour le cas de cinq valeurs équidistantes de la variable, mais il n'a point donné les valeurs numériques des coefficients $\alpha_0$; $\beta_0$, $\beta_1$; $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\gamma_2$; ....

Le choix de l'époque à laquelle se rapportent les calculs, et l'emploi d'observations également espacées ou réduites à l'équidistance, ne sont point indif-

férents. Nous ne pouvons mieux faire, à cet égard, que de renvoyer aux intéressantes propositions que M. Cauchy a émises sur ce sujet.

Il nous reste maintenant à dire quelques mots sur la manière d'appliquer les formules du numéro précédent, lorsqu'on veut avoir égard au poids des observations. Il va sans dire que, si les observations peuvent être réputées également bonnes, leur poids sera proportionnel au nombre des observations élémentaires qui concourent à leur formation. Quoi qu'il en soit, si l'on désigne les poids par $n'$, il suffira de remplacer, dans le développement de $y$ suivant les puissances du temps, $y$ par $n'y$, et de poser d'ailleurs

$$(115) \qquad A = n', \quad B = n't, \quad C = n't^2, \quad D = n't^3, \quad E = n't^4, \ldots.$$

Dans le cas où il s'agirait d'opérer le développement des différences observées de $y$ avec les valeurs calculées, on emploierait ces différences à la place de $y$.

Les formules du n° 23 s'appliqueront au calcul des inconnues $a$, $b$, $c$, ...; seulement, il ne faudra pas perdre de vue que, $\Delta^\nu y$ remplaçant $n'\Delta^\nu y$, il faudra, pour se rendre compte de l'ordre de grandeur des restes $\Delta^\nu y$, diviser ces restes par les valeurs de $n'$ qui leur correspondent.

Il est visible enfin que, si l'on substitue les valeurs (115) et $n'y$ à la place de $y$, dans l'équation (80), tous les termes deviendront divisibles par $n'$, et le résultat aura la forme demandée (113).

L'introduction des poids fait perdre l'avantage que présentent les tableaux calculés à l'avance.

## *Résumé des formules propres à la détermination des éléments des orbites des planètes.*

### *Calcul des éléments approchés.*

**25.** *Remarques préliminaires.* — Nous supposons que l'on ne possède aucune donnée sur les distances de la planète à la Terre aux époques des observations. Dans cette circonstance, il est impossible de corriger celles-ci des effets de la parallaxe et de l'aberration. Il est également impossible de les réduire au centre de gravité de la Terre et de la Lune, comme l'exigerait l'application rigoureuse de nos formules. L'aberration varie d'une manière régulière et peu rapide, ailleurs que dans le voisinage des stations. La parallaxe, au contraire, varie irrégulièrement, à raison du lieu et de l'heure des observations; mais ses irrégularités sont ordinairement peu considérables, attendu que, dans le cas d'une nouvelle planète, l'on ne fait usage que de positions obtenues dans des observatoires peu éloignés en latitude, et que si

les observations sont extra-méridiennes, les heures locales des observations sont peu différentes ou varient avec une certaine régularité. Le plus ordinairement, les variations de parallaxe des nouvelles petites planètes ne présentent pas d'irrégularités provenant de ces circonstances, qui excèdent 1″.

Considérons maintenant l'effet des perturbations lunaires. En nous aidant de la *figure* du n° 13, où P désigne le lieu de la planète, et $P_1$ sa projection sur l'écliptique, nous trouverons aisément, pour expressions des quantités qu'il faudrait ajouter aux observations, afin de les ramener au centre de gravité de la Terre et de la Lune, les corrections

$$(1)\quad \begin{cases} -\delta\alpha = -\dfrac{m_1}{m'+m_1}\,\dfrac{8'',58}{\sin P}\,\dfrac{\cos\Lambda}{\cos\theta}\,\dfrac{\sin(\mathbb{C}-\alpha)}{\Delta}, \\ -\delta\theta = -\dfrac{m_1}{m'+m_1}\,\dfrac{8'',58}{\sin P}\,\dfrac{\cos\theta\sin\Lambda-\sin\theta\cos\Lambda\cos(\mathbb{C}-\alpha)}{\Delta}. \end{cases}$$

Pour apprécier l'ordre de grandeur de ces corrections, soit $\frac{m_1}{m'}=\frac{1}{86}$ et $P = 5°7'30''$ : il viendra à peu près $\frac{m_1}{m'+m_1}\,\frac{8'',58}{\sin P} = 5'',9$; et en supposant $\Delta = 1,3$, valeur qui n'est pas la plus faible possible, on voit que la valeur absolue de $-\delta\alpha$ peut atteindre $4'',5$. Quant à celle de $-\delta\theta$, elle pourra être, dans les cas ordinaires, de l'ordre de grandeur du dixième de la précédente. Ces corrections passent du minimum au maximum dans un intervalle de quatorze jours environ, l'amplitude des variations de la première étant de 9″ à peu près. Il sera donc difficile, sinon impossible, de représenter ces variations, dans des séries ordonnées suivant les puissances du temps et comprenant quinze à vingt jours, sans employer un grand nombre de termes. D'ailleurs, il serait contraire au but que nous nous proposons, de chercher à représenter ces termes, dont les séries devraient en toute rigueur être dépouillées. On pourra donc, si l'on se borne à un petit nombre de termes, comme cinq ou six, s'attendre à ce que les erreurs du développement de la longitude s'élèvent à 3″ ou 4″, indépendamment des erreurs des observations, ou, en ayant égard à celles-ci, à 6″ ou 7″ dans certains cas. Le développement de la latitude pourra évidemment présenter, à cause des erreurs des observations, des discordances s'élevant à 3″ ou 4″. Tel était l'objet principal de cette discussion.

**26.** Nous supposerons que l'on dispose d'un certain nombre d'observations à peu près également espacées s'il est possible.

On retranchera des longitudes les valeurs correspondantes de la nutation, en sorte que chaque longitude se trouve rapportée à l'équinoxe moyen; et l'on prendra, pour origine du temps, une époque qui pourra être celle d'une ob-

servation voisine du milieu de l'intervalle de temps embrassé par les observations, ou mieux encore l'époque moyenne de celles-ci.

Si l'on veut avoir égard au poids $n'$ des observations, on posera successivement pour chacune d'elles,

(II) $$y = n'\alpha, \quad y = n'\theta,$$

suivant que l'on considérera les longitudes ou les latitudes. (Ces quantités peuvent, sans inconvénient, rester exprimées en degrés, minutes et secondes.) Puis, en désignant par $t$ le produit du nombre de jours comptés de l'époque choisie, par la constante $k$,

(III) $$\log k = 8{,}235\ 5821,$$

on posera encore, pour chaque observation,

$$A = n', \quad B = n't, \quad C = n't^2, \quad D = n't^3, \quad E = n't^4, \ldots.$$

(Dans le cas où l'on n'aurait pas égard aux poids, on ferait ici $n' = 1$.)

Avec ces nombres, on procédera au calcul des sommes *subordonnées*, suivant les formules du tableau du n° 23. Les calculs relatifs aux longitudes devront être poussés jusqu'à un indice $\nu$ des différences $\Delta y$, tel que la valeur maximum absolue de $\Delta^\nu y$ soit au-dessous de $n'.6''$ à $n'.7''$, ou simplement $6''$ à $7''$ si l'on n'a pas égard aux poids; ceci suppose que l'intervalle qui sépare les observations extrêmes sera d'au moins quinze jours. Dans les calculs relatifs à la série des latitudes, on poursuivra jusqu'à ce que les erreurs restantes n'excèdent pas la moitié des précédentes. Cela fait, les formules qui viennent ensuite dans le tableau feront connaître les coefficients $\alpha_0$; $\beta_0$, $\beta_1$; $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\gamma_2$; ..., qui sont communs aux deux développements; et, au moyen de ces coefficients, les dernières formules du tableau permettront de calculer les coefficients $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ..., du développement des séries de la longitude et de la latitude.

Dans tous les calculs suivants, on choisira pour époque $t$ l'origine du temps, c'est-à-dire que l'on fera

$$t = 0.$$

Considérons tout d'abord les valeurs de la longitude et de ses dérivées à cette époque. Nous pourrons, afin de simplifier les calculs relatifs aux coordonnées terrestres, prendre pour équinoxe fixe, l'équinoxe vrai de cette même époque, et nous aurons

(IV) $$\alpha = a + \text{nutation},$$

puis ensuite

$$\frac{d\alpha}{dt} = b - \text{précession pendant l'unité de temps}.$$

Or l'unité de temps est $k$ jours solaires moyens; d'un autre côté, les coeffi-

cients $b, c, d, e, \ldots$, étant supposés exprimés en secondes de degré, doivent actuellement être convertis en nombres abstraits ou multipliés par $\sin 1''$. Ayant opéré cette conversion, on aura, pour les longitudes,

$$(v) \qquad \left\{ \frac{d\alpha}{dt} = b - 0{,}000\ 03875, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2c, \quad \frac{d^3\alpha}{dt^3} = 6d; \right.$$

et, pareillement, pour les latitudes,

$$(vi) \qquad \theta = a, \quad \frac{d\theta}{dt} = b, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 2c.$$

**27.** En vertu du choix adopté de l'unité de temps, on aura, dans toutes les formules suivantes,

$$(vii) \qquad f\mu' = 1, \quad \log\sqrt{f} = 9.999\ 9994.$$

Maintenant, on tirera des éphémérides la longitude et le rayon vecteur terrestres que l'on corrigera de l'aberration, s'ils en sont affectés; on pourra, en outre, si l'on y tient, les corriger des perturbations lunaires, par les formules

$$(viii) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\delta ☿ &= -\frac{a_1}{P}\sin(☾ - ☉), \\ -\delta \log R &= -\frac{a'_1}{P}\cos(☾ - ☉). \end{aligned} \right.$$

L'usage bien entendu de ces formules exige que l'on se serve des valeurs de $a_1$ et $a'_1$ correspondantes aux valeurs du rapport des masses de la Lune et de la Terre, employé dans la construction des éphémérides. Voici les logarithmes de ces facteurs :

| Masse de la Lune / Masse de la Terre | $\frac{1}{68{,}4}$ | $\frac{1}{86}$ |
|---|---|---|
| $\log a_1$ | 4,4064, | 4,3083; |
| $\log a'_1$ | 8,7298, | 8,6317. |

Ayant corrigé ☿ de l'effet de l'aberration et du terme $-\delta ☿$ des formules précédentes, on corrigera aussi la longitude du Soleil de cette dernière quantité. Il faudra alors chercher dans les Tables les époques correspondantes à $☉ - \delta ☿ \mp 90^\circ$, calculer ensuite le mouvement du point équinoxial entre l'époque donnée et chacune de celles-ci, puis augmenter les 90 degrés de ce déplacement. On calculera enfin, pour ces deux époques, les perturbations lunaires $\delta ☿_1$ et $\delta ☿'$, au moyen de quoi l'on obtiendra deux longitudes solaires apparentes égales à

$$☉ - \delta ☿ - (90^\circ + \text{mouvement du point équinoxial}) + \delta ☿_1,$$
$$☉ - \delta ☿ + (90^\circ + \text{mouvement du point équinoxial}) + \delta ☿'.$$

(Nous négligeons ici la variation de l'aberration.)

Les Tables donneront les valeurs des logarithmes des rayons vecteurs terrestres correspondants, et on leur appliquera les corrections $-\delta \log R$ données par la seconde formule (VIII), puis les corrections d'aberration s'il y a lieu. On aura ainsi les logarithmes des rayons vecteurs que nous avons désignés par $R_1$ et $R'$; celui qui correspond à l'époque $t = 0$ étant spécialement désigné par R.

Les dérivées de la longitude et du rayon vecteur terrestre seront alors

$$(IX)\qquad \frac{d\odot}{dt} = \frac{\sqrt{f\mu'}}{R^2}\sqrt{\frac{2R'R_1}{R'+R_1}},\qquad \frac{dR}{dt} = \frac{\sqrt{f\mu'}(R'-R_1)}{\sqrt{2R'R_1(R'+R_1)}}.$$

Quoique ces formules ne tiennent pas compte des corrections que nécessiteraient les perturbations, elles donnent des résultats extrêmement peu différents de ceux que fournissent les méthodes d'interpolation appliquées aux positions du Soleil, tirées des Tables et corrigées par les formules (VIII).

**28.** Maintenant, on peut, sans qu'il soit nécessaire de prendre aucune précaution particulière, procéder au calcul des expressions suivantes :

$$(X)\quad \left\{\begin{aligned}
&\xi = \odot - \alpha, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\odot}{dt} - \frac{d\alpha}{dt},\\
&A' = f\mu'\frac{\sin\xi}{R^2}\left(\frac{3}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{2}{R}\frac{dR}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right) + f\mu'\frac{\cos\xi}{R^2}\left(3\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\odot}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt},\\
&B' = f\mu R\frac{d\alpha}{dt}\left[\sin\xi\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - 3\tang\theta\frac{d\theta}{dt}\right) - \cos\xi\left(3\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\odot}{dt}\right)\right],\\
&C' = -3f\mu R^3\sin\xi\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - \tang\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{f\mu'}{R^3}\sin\xi\cos\xi\right],\\
&D' = \frac{3}{2}(f\mu)^2R^3\sin^2\xi\cos\xi;\\
&A'' = \left(\frac{d^3\alpha}{dt^3} + 2\frac{d\alpha^3}{dt^3}\right)\frac{d\alpha}{dt} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)^2,\\
&B'' = -2f\mu\frac{d\alpha^2}{dt^2},\\
&C'' = -3f\mu R^2\sin\xi\left\{\begin{aligned}&\cos\xi\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - 2\tang\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]\\ &\qquad + \sin\xi\left(\frac{1}{2\cos^2\theta}\frac{f\mu'}{R^3} - \frac{d\xi}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right)\end{aligned}\right\},\\
&D'' = \frac{3}{2}\frac{(f\mu)^2R^2\sin^2\xi}{\cos^2\theta},\\
&\cos\varkappa = -\cos\xi\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Il convient ici de faire une hypothèse sur la valeur de $r$, que l'on corrigera

ensuite de manière à satisfaire aux deux équations

$$(\text{XI}) \qquad \rho = \mathrm{R}\cos\theta\left(\cos\varkappa \pm \sqrt{\frac{r^2}{\mathrm{R}^2} - \sin^2\varkappa}\right),$$

$$(\text{XII}) \qquad \mathrm{A}' + \frac{\mathrm{B}'}{r^3} + \frac{\mathrm{C}'}{r^5} + \frac{\mathrm{D}'}{r^8} + \rho\left(\mathrm{A}'' + \frac{\mathrm{B}''}{r^3} + \frac{\mathrm{C}''}{r^5} + \frac{\mathrm{D}''}{r^8}\right) = 0.$$

On disposera du double signe du radical de manière à rendre $\rho$ positif; d'ailleurs, le signe $+$ doit seul être employé dans le cas des planètes supérieures.

Soit $\Phi$ la valeur du premier membre de l'équation (XII) correspondante à la valeur hypothétique de $r$; on calculera

$$(\text{XII } bis) \quad \begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dr} = -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{3\mathrm{B}'}{r^3} + \dfrac{5\mathrm{C}'}{r^5} + \dfrac{8\mathrm{D}'}{r^8}\right) - \dfrac{\rho}{r}\left(\dfrac{3\mathrm{B}''}{r^3} + \dfrac{5\mathrm{C}''}{r^5} + \dfrac{8\mathrm{D}''}{r^8}\right) \\ \qquad + \dfrac{r}{\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}}\left(\mathrm{A}'' + \dfrac{\mathrm{B}''}{r^3} + \dfrac{\mathrm{C}''}{r^5} + \dfrac{\mathrm{D}''}{r^8}\right), \end{cases}$$

et la valeur approchée de la correction de $r$ sera

$$\delta r = -\frac{\Phi}{\dfrac{d\Phi}{dr}}.$$

**29.** Ayant trouvé la valeur de $r$ qui satisfait aux équations précédentes, on devra distinguer plusieurs cas.

1°. La planète est plus voisine de l'opposition que de la station : on calculera

$$(\text{XIII}) \quad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{1}{2\dfrac{d\alpha}{dt}}\left[\mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right) - \rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}\right], \\ \dfrac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}\cos\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right) + \rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} - \rho\dfrac{f\mu}{r^3}, \\ r\dfrac{dr}{dt} = (\mathrm{R} + \rho\cos\xi)\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} - \rho\,\mathrm{R}\sin\xi\dfrac{d\xi}{dt} \\ \qquad\qquad + \left(\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{\rho^2}{\cos^2\theta}\tang\theta\dfrac{d\theta}{dt}; \end{cases}$$

et l'on aura une vérification de l'ensemble des calculs précédents, si l'équation suivante est satisfaite par les valeurs obtenues :

$$(\text{XIII } bis) \quad \begin{cases} 3\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\dfrac{d\alpha}{dt}\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + \rho\dfrac{d^3\alpha}{dt^3} - \left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right)\left(\sin\xi\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{R}\cos\xi\dfrac{d\xi}{dt}\right) \\ \qquad + 3\,\mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^4}\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} - \dfrac{f\mu}{r^4}\dfrac{dr}{dt}\right) = 0. \end{cases}$$

2°. La planète est plus près de la station que de l'opposition : on fera usage des formules

$$(\text{XIV})\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}\cos\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right) + \rho\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} - \rho\dfrac{f\mu}{r^3}, \\ \mathrm{Q} = (\mathrm{R} + \rho\cos\xi)\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} - \rho\,\mathrm{R}\sin\xi\dfrac{d\xi}{dt} + \dfrac{\rho^2}{\cos^2\theta}\tang\theta\dfrac{d\theta}{dt}, \\ \dot{\mathrm{Q}}' = 2\dfrac{d\alpha}{dt}\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + 3\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}\sin\xi\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} + \rho\dfrac{d^3\alpha}{dt^3} \\ \qquad\qquad - \left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right)\left(\sin\xi\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{R}\cos\xi\dfrac{d\xi}{dt}\right), \\ r\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\mathrm{Q}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{1}{3}\mathrm{Q}'\left(\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)}{\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\left(\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)}, \\ \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{r\dfrac{dr}{dt} - \mathrm{Q}}{\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}}; \end{array}\right.$$

et l'on aura, pour vérification des calculs, la relation

$$(\text{XIV } bis)\qquad 2\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt} + \rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right) = 0.$$

3°. Enfin, si l'on craint de ne pas obtenir assez de précision en appliquant l'un ou l'autre de ces systèmes de formules, parce que la position de la planète ne permettra pas de décider lequel des deux convient le mieux, on pourra employer le suivant, qui convient encore aux deux cas précédents :

$$(\text{XV})\qquad \left\{\begin{array}{l} p = \mathrm{R}\sin\xi\left(\dfrac{f\mu'}{\mathrm{R}^3} - \dfrac{f\mu}{r^3}\right) - \rho\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ q = \dfrac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\mathrm{Q} - \dfrac{1}{3}\mathrm{Q}', \\ q' = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{f\mu\,\mathrm{R}\sin\xi}{r^5}\left(\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right), \\ \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{2p\dfrac{d\alpha}{dt} + qq'}{4\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} + q'^2}, \\ r\dfrac{dr}{dt} = \mathrm{Q} + \left(\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\dfrac{d\rho}{dt}; \end{array}\right.$$

et vérifier les calculs au moyen de l'équation

$$(\text{XV } bis)\qquad \begin{cases} r\dfrac{dr}{dt} = (\mathrm{R}+\rho\cos\xi)\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} - \rho\,\mathrm{R}\sin\xi\dfrac{d\xi}{dt} \\ \qquad\qquad + \left(\mathrm{R}\cos\xi + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\right)\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{\rho^2}{\cos^2\theta}\operatorname{tang}\theta\dfrac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

**30.** Le calcul des coordonnées de la Terre et des composantes de sa vitesse s'effectue par les formules

$$(\text{XVI})\qquad \begin{cases} x' = \mathrm{R}\cos\odot, & \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{x'}{\mathrm{R}}\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} - y'\dfrac{d\odot}{dt}, \\ y' = \mathrm{R}\sin\odot, & \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{y'}{\mathrm{R}}\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} + x'\dfrac{d\odot}{dt}; \end{cases}$$

on a ensuite, pour calculer les coordonnées de la planète et les composantes de sa vitesse,

$$(\text{XVII})\qquad \begin{cases} x = x' + \rho\cos\alpha, & \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'}{dt} + \cos\alpha\dfrac{d\rho}{dt} - \rho\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}, \\ y = y' + \rho\sin\alpha, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt} + \sin\alpha\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}, \\ z = \rho\operatorname{tang}\theta, & \dfrac{dz}{dt} = \operatorname{tang}\theta\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{\rho}{\cos^2\theta}\dfrac{d\theta}{dt}; \end{cases}$$

et, pour vérifications,

$$(\text{XVII } bis)\qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}.$$

Les constantes des aires se calculent par les expressions

$$(\text{XVIII})\qquad \begin{cases} \mathrm{G} = y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}, \\ \mathrm{G}' = z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}, \\ \mathrm{G}'' = x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}, \end{cases}$$

que l'on vérifie par l'équation du plan de l'orbite

$$(\text{XVIII } bis)\qquad \mathrm{G}x + \mathrm{G}'y + \mathrm{G}''z = 0.$$

La longitude du nœud ascendant se tire de la formule

$$(\text{XIX})\qquad \operatorname{tang}\Omega = -\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}'};$$

on doit prendre $\Omega$ de manière que son sinus ait le signe de G, ou son cosinus le signe contraire à celui de G'.

On peut employer, pour déterminer l'inclinaison I, l'une des formules suivantes, en ayant le soin de prendre cette quantité entre o et 180 degrés.

$$(\text{xx}) \qquad \operatorname{tang} \mathrm{I} = \frac{\sqrt{\mathrm{G}^2 + \mathrm{G}'^2}}{\mathrm{G}''} = \frac{1}{\sin \Omega} \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}''} = -\frac{1}{\cos \Omega} \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}''}.$$

Le demi-paramètre $\Pi$ se déduit de l'une quelconque des expressions

$$(\text{xxi}) \quad f\mu\Pi = \mathrm{G}^2 + \mathrm{G}'^2 + \mathrm{G}''^2 = \left(\frac{\mathrm{G}''}{\cos \mathrm{I}}\right)^2 = r^2 \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) - \left(r \frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Le demi-grand axe A se tire de l'équation des forces vives

$$(\text{xxi } bis) \qquad \frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{2}{r} - \frac{1}{f\mu} \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right).$$

En supposant la durée T de la révolution, exprimée en années sidérales, on a

$$(\text{xxii}) \qquad \mathrm{T} = \sqrt{\frac{f\mu'}{f\mu}}\, \mathrm{A}^{\frac{3}{2}}.$$

Le mouvement héliocentrique diurne exprimé en secondes sexagésimales, s'en déduit par la formule

$$(\text{xxiii}) \qquad \mathrm{N}'' = \frac{1}{\mathrm{T}} \frac{k}{\sin 1''}; \quad \log \frac{k}{\sin 1''} = 3{,}55o\ oo72.$$

On a maintenant, pour calculer l'anomalie V et l'excentricité E,

$$(\text{xxiv}) \qquad \begin{cases} \mathrm{E} \sin \mathrm{V} = \dfrac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{f\mu}} \dfrac{dr}{dt}, \\ \mathrm{E} \cos \mathrm{V} = \dfrac{\Pi}{r} - 1; \end{cases}$$

on en tire tang V par division, d'où V sans ambiguïté : l'une ou l'autre de ces formules donne ensuite E.

Posant

$$(\text{xxv}) \qquad \sin \eta = \mathrm{E},$$

cette équation sera très-convenable pour calculer l'angle $\eta$ dans le cas des faibles excentricités, et l'on aura une vérification au moyen de

$$(\text{xxvi}) \qquad \cos \eta = \frac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{\mathrm{A}}}.$$

L'anomalie excentrique est donnée par la formule (*)

$$\text{(xxvii)} \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}u = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{V}}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)};$$

on a encore, pour vérification,

$$\text{(xxvii bis)} \qquad \mathrm{A}\cos\eta\sin u - r\sin\mathrm{V} = 0.$$

L'anomalie moyenne, à l'époque $t = 0$, est

$$\text{(xxviii)} \qquad \varepsilon - \varpi = u - \frac{\mathrm{E}}{\sin 1''}\sin u.$$

Il va sans dire que, pour avoir l'anomalie moyenne à une époque postérieure $j$ exprimée en jours, il suffira d'ajouter à la valeur précédente, le produit $\mathrm{N}''j$.

La longitude $\nu_1$, dans l'écliptique, se tirera de

$$\text{(xxix)} \qquad \operatorname{tang}\nu_1 = \frac{y}{x},$$

$\nu_1$ étant pris de sorte que son sinus ait le signe de $y$; et l'on aura, pour calculer la distance $\nu - \Omega$ de la planète au nœud ascendant,

$$\text{(xxx)} \qquad \operatorname{tang}(\nu - \Omega) = \frac{\operatorname{tang}(\nu_1 - \Omega)}{\cos \mathrm{I}};$$

$\nu - \Omega$ doit être choisi de manière que son cosinus ait le signe de $\cos(\nu_1 - \Omega)$. On aura, pour vérifications,

$$\text{(xxx bis)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\lambda = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{z}{x}\cos\nu_1 = \dfrac{z}{y}\sin\nu_1, \\ \sin\lambda = \sin(\nu - \Omega)\sin \mathrm{I}, \quad \cos\lambda = \dfrac{\cos(\nu - \Omega)}{\cos(\nu_1 - \Omega)}. \end{cases}$$

Enfin, la distance du périhélie au nœud ascendant sera

$$\text{(xxxi)} \qquad \varpi - \Omega = \nu - \Omega - \mathrm{V},$$

d'où l'on tirera la longitude $\varpi$ du périhélie.

---

(*) On obtiendrait aussi $u$ directement, par les formules

$$\mathrm{E}\sin u = \frac{r\dfrac{dr}{dt}}{\sqrt{f\mu}\,\sqrt{\mathrm{A}}},$$

$$\mathrm{E}\cos u = 1 - \frac{r}{\mathrm{A}},$$

qui sont les analogues des formules (xxiv) et donneraient E de la même manière; mais alors V se déduirait de $u$ par l'équation (xxvii).

Les longitudes $\varpi$ et $\Omega$ se trouvent rapportées à l'équinoxe vrai de l'époque. Il conviendra d'en retrancher la nutation, pour les compter de l'équinoxe moyen. Si l'on veut, après cela, les rapporter à l'équinoxe moyen d'une autre époque, il suffira d'ajouter le mouvement de précession pendant l'intervalle, si cette époque est postérieure à la première, et de le retrancher dans le cas contraire.

## *Correction des éléments approchés.*

**31.** Nous distinguons deux cas :

1°. Celui où les éléments approchés ayant été calculés d'après les formules que nous venons de présenter, on se proposera d'obtenir une solution plus exacte en rapportant tous les calculs à l'époque adoptée dans la première approximation ;

2°. Le cas où les éléments approchés auront été calculés en suivant une méthode non fondée sur l'emploi des dérivées de la longitude et de la latitude ; ou bien celui dans lequel les éléments ayant été calculés par notre méthode, on voudra les corriger en employant de nouvelles observations qui exigent, pour l'usage bien entendu des séries, le changement de l'époque à laquelle se rapportent les calculs.

Notre but n'est pas précisément d'obtenir les corrections des éléments de l'orbite, mais bien les corrections des quantités $\alpha$, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$ ; $\theta$ et $\frac{d\theta}{dt}$ qui servent à calculer les éléments. Le moyen d'obtenir ces corrections est le même dans les deux cas : on devra calculer d'abord une éphéméride des positions de la planète, en se servant des éléments approchés. Il est très-avantageux d'employer, à cet effet, les coordonnées rectangulaires du Soleil, que l'on trouve dans les *Éphémérides de Berlin* ou dans le *Nautical Almanach;* en ayant le soin, pour ce dernier recueil, d'ajouter aux coordonnées $y_1$ et $z_1$ du Soleil les corrections

$$\text{(XXXII)} \qquad \begin{cases} \delta y_1 = -\,0{,}000\ 00193 \,.\, \beta, \\ \delta z_1 = +\,0{,}000\ 00445 \,.\, \beta, \end{cases}$$

afin de tenir compte de la latitude $\beta$ du Soleil à laquelle on n'a pas eu égard. On obtient immédiatement les ascensions droites et déclinaisons vraies, en partant de l'anomalie excentrique. Il ne reste qu'à ajouter l'aberration, pour avoir les positions géocentriques apparentes.

On peut également se servir des formules ordinaires, que nous reproduisons ci-dessous n° **32**, pour calculer les valeurs de $\alpha$ et $\theta$ ; il faut alors corriger, de l'aberration seulement, le rayon vecteur et la longitude de la Terre

tirés des Tables, et ajouter à la latitude obtenue $\theta$, le terme

$$\text{(XXXIII)} \qquad \delta\theta = \frac{R}{\Delta}\cos\theta \,.\, \delta,$$

$\Delta$ désignant la distance de la planète à la Terre. On aura ainsi les longitudes et latitudes vraies auxquelles il faudra ajouter l'aberration (*voir* la note du n° 32), pour avoir les longitudes et latitudes géocentriques apparentes.

Dans le cas des petites planètes, les positions géocentriques peuvent être calculées avec sécurité de cinq en cinq jours jusqu'aux dixièmes de seconde, puis interpolées au moyen de formules générales que le manque de temps m'a empêché de publier jusqu'ici, et dont j'extrais, pour le cas actuel, les suivantes :

$$\text{(XXXIV)} \quad \begin{cases} 5\,\delta u_0 = \Delta u - 0{,}4\,\Delta^2 u + 0{,}24\,\Delta^3 u - 0{,}168\,\Delta^4 u + 0{,}1278\,\Delta^5 u - \dots \\ 25\,\delta^2 u_0 = \Delta^2 u - 0{,}8\,\Delta^3 u + 0{,}64\,\Delta^4 u - 0{,}528\,\Delta^5 u + \dots, \\ 125\,\delta^3 u_0 = \Delta^3 u - 1{,}2\,\Delta^4 u + 1{,}20\,\Delta^5 u - \dots, \\ 625\,\delta^4 u_0 = \Delta^4 u - 1{,}6\,\Delta^5 u + \dots, \\ 3125\,\delta^5 u_0 = \Delta^5 u - \dots, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dans ces formules, $\Delta u$, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ..., désignent les différences finies de la fonction $u$, de cinq en cinq jours par exemple, et $\delta u_0$, $\delta^2 u_0$, $\delta^3 u_0$, ..., les différences finies de la même fonction, pour l'intervalle d'un jour et le premier rang de la série. Les coefficients numériques sont d'ailleurs rigoureusement exacts.

Ayant tiré de l'éphéméride ainsi interpolée, les positions apparentes pour les époques des observations, et ajouté les parallaxes, la comparaison se fait immédiatement.

Considérant les excès des ascensions droites et déclinaisons observées sur les positions calculées, on groupera tous les résultats compris dans des intervalles de temps pendant lesquels on pourra admettre que les excès varient proportionnellement aux temps. Il n'est pas nécessaire que cette hypothèse se réalise absolument; il suffit que l'erreur qui en résulte soit notablement au-dessous des erreurs des observations. Si, dans chaque groupe, on prend l'excès moyen, et qu'on le fasse correspondre à la moyenne des temps, le résultat sera d'autant plus près d'être exempt des erreurs des observations, que celles-ci seront plus nombreuses; les écarts pourront donc être attribués principalement aux erreurs des éléments. Ces excès, ajoutés aux coordonnées géocentriques tirées de l'éphéméride, donneront des positions dites *positions normales*. De cette manière, on condense quatre-vingts à cent observations en dix ou douze positions de cette espèce, dont chacune prend un *poids* dépendant du nombre et de la précision des observations qui concourent à les former.

Il est bon, pour les comparaisons ultérieures, de transformer immédiatement en longitudes et latitudes, les ascensions droites et déclinaisons provenant des *positions normales*.

Il reste actuellement à convertir en excès de longitude et de latitude, les excès des observations en ascension droite et déclinaison trouvés ci-dessus; à cet effet, on se servira des formules

$$\text{(xxxv)}\quad \begin{cases} \cos\varphi = \sin\omega \dfrac{\cos\alpha}{\cos D} = \sin\omega \dfrac{\cos \text{Æ}}{\cos\theta}, \quad \sin\varphi = \dfrac{\cos\omega - \sin\theta \sin D}{\cos\theta \cos D}, \\ \delta\alpha = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\theta}\delta D + \dfrac{\sin\varphi}{\cos\theta}\cos D\,\delta \text{Æ}, \\ \delta\theta = \sin\varphi\,\delta D - \cos\varphi\cos D\,\delta \text{Æ}; \end{cases}$$

où Æ et D désignent les ascensions droites et déclinaisons, $\delta$Æ et $\delta$D les excès des observations sur le calcul, $\omega$ l'obliquité de l'écliptique, et $\varphi$ un angle auxiliaire auquel on donne quelquefois la dénomination d'*angle de position*. L'angle $\varphi$ étant déterminé par son sinus et son cosinus, il ne peut y avoir d'ambiguité. Ce sont ces quantités $\delta\alpha$ et $\delta\theta$ que nous avons désignées par $\chi$ dans le n° 15.

Ayant pris pour origine du temps une époque peu différente de l'époque moyenne des observations, ou mieux cette dernière, il s'agira de représenter les quantités $\chi$ par des séries, ce qui se fera en suivant exactement les indications données dans le n° 26, pour le développement de $\alpha$ ou $\theta$; $n'$ étant le poids des moyennes, on posera

$$y = n'\chi.$$

Parvenu aux valeurs de $a$, $b$, $c$, $d$, ..., que l'on convertira, à l'exception de $a$, en nombres abstraits, en multipliant par $\sin 1''$, on aura à l'origine du temps,

$$\text{(xxxvi)}\quad \begin{cases} \delta\alpha \quad \text{ou} \quad \delta\theta = a \\ \delta\dfrac{d\alpha}{dt} \quad \text{ou} \quad \delta\dfrac{d\theta}{dt} = b, \\ \delta\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \delta\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 2c, \\ \delta\dfrac{d^3\alpha}{dt^3} \cdots\cdots \quad = 6d. \end{cases}$$

32. Dans le premier cas, examiné au commencement du numéro précédent, il suffira d'ajouter ces corrections respectivement aux valeurs primitives de $\alpha$, $\dfrac{d\alpha}{dt}$, $\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\dfrac{d^3\alpha}{dt^3}$; $\theta$, $\dfrac{d\theta}{dt}$ et $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$; (la valeur corrigée de $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ ne doit servir qu'à vérifier la concordance des données).

Dans le second cas, il faudra préalablement calculer les valeurs primitives de $\alpha$ et $\theta$. Les formules suivantes, très-connues d'ailleurs, sont appropriées à ce but, et serviraient au calcul d'une éphéméride, comme nous l'avons dit plus haut; observons toutefois que la longitude de la Terre et le logarithme de son rayon vecteur, tirés des Tables, doivent être corrigés ici non-seulement de l'effet de l'aberration, mais, en outre, des quantités $-\delta\odot$ et $-\delta \log R$, données par les équations (VIII). (Dans le calcul d'une éphéméride, on n'aurait point à opérer la réduction au centre de gravité de la Terre et de la Lune.) Voici ces formules :

$$(\text{XXXVII}) \qquad N''t + \varepsilon - \varpi - \left(u - \frac{E}{\sin 1''}\sin u\right) = 0.$$

(Ici $t$ désigne le nombre de jours compté depuis l'époque de l'anomalie moyenne.) Il s'agit de tirer $u$ de cette équation. Soit $\psi$ la valeur de son premier membre, pour une valeur approchée de $u$; la correction approchée de cette quantité sera

$$(\text{XXXVII } bis) \qquad \delta u = \frac{\psi}{1 - E\cos u}.$$

$$(\text{XXXVIII}) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}V = \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right)\operatorname{tang}\frac{1}{2}u, \qquad r = A\cos\eta\frac{\sin u}{\sin V}.$$

Si $u$ et V se trouvent trop voisins de 0 degré ou 180 degrés, on remplacera la seconde par l'une de celles-ci :

$$(\text{XXXIX}) \qquad r = A(1 - E\cos u) = \frac{\Pi}{1 + E\cos V}.$$

$$(\text{XL}) \qquad \begin{cases} v - \Omega = \varpi - \Omega + V, \\ \operatorname{tang}(v_1 - \Omega) = \operatorname{tang}(v - \Omega)\cos I; \end{cases}$$

on doit choisir $(v_1 - \Omega)$ de sorte que son cosinus et celui de $(v - \Omega)$ aient le même signe.

$$(\text{XLI}) \qquad \operatorname{tang}\lambda = \sin(v_1 - \Omega)\operatorname{tang} I,$$

$\lambda$ doit être pris entre $+90^\circ$ et $-90^\circ$;

$$(\text{XLII}) \qquad \frac{r_1}{R} = \frac{r}{R}\cos\lambda.$$

Pour compter les longitudes à partir de l'équinoxe vrai; si $t'$ désigne le nombre de jours écoulés à partir de l'époque à laquelle se rapporte la longitude moyenne $\Omega$ du nœud ascendant, on aura

$$(\text{XLIII}) \qquad \begin{cases} v_1 = (v_1 - \Omega) + \Omega + 0'',1375\ldots t' + \text{nutation en longitude}, \\ \operatorname{tang}(\alpha - v_1) = \dfrac{\sin(\odot - v_1)}{\cos(\odot - v_1) - \dfrac{r_1}{R}}. \end{cases}$$

(Dans le cas du calcul d'une éphéméride, on ne devrait corriger $\mathfrak{Z}$ et $\log R$ que de l'effet de l'aberration.) Il faut prendre $\alpha - \nu_1$ de sorte que son sinus soit de signe contraire à $\sin(\mathfrak{Z} - \nu_1)$. On en déduit $\alpha$.

(XLIV)
$$\frac{\rho}{R} = -\frac{\sin(\mathfrak{Z} - \nu_1)}{\sin(\alpha - \nu_1)}.$$

Si les sinus, dans le second membre, sont simultanément trop petits, pour donner lieu à un résultat bien déterminé, il faudra recourir à la formule

(XLIV *bis*)
$$\frac{\rho}{R} = \frac{r_1}{R}\cos(\alpha - \nu_1) - \cos(\mathfrak{Z} - \alpha);$$

on aura ensuite

(XLV)
$$\frac{r_1}{\rho} = \frac{\frac{r_1}{R}}{\frac{\rho}{R}}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{r_1}{\rho}\operatorname{tang}\lambda,$$

ou bien

(XLV *bis*)
$$\frac{r}{\rho} = \frac{\frac{r}{R}}{\frac{\rho}{R}}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{r}{\rho}\sin\lambda.$$

Comme nous avons besoin ici des positions vraïes, réduites au centre de gravité de la Terre et de la Lune, nous ne devons point ajouter d'aberration ni de terme pour tenir compte de l'effet de la latitude du Soleil (*).

---

(*) Dans le calcul d'une position géocentrique apparente, $\Delta$ désignant la distance de la planète à la Terre, on aurait

$$\Delta = \frac{\rho}{\cos\theta};$$

et, pour le terme $\delta\theta$ dépendant de la latitude solaire $\delta$,

$$\delta\theta = \frac{R}{\Delta}\cos\theta \cdot \delta.$$

Quant à l'aberration, on la tirerait de la double formule

$$\frac{\text{aberration en longitude ou latitude}}{\text{mouvement diurne en longitude ou latitude}} = (7{,}76059 -)\,\Delta,$$

la quantité entre parenthèses étant le logarithme du nombre dont elle tient la place.

On peut, si on le préfère, n'appliquer l'aberration qu'aux ascensions droites et déclinaisons, lorsque le calcul de transformation en coordonnées angulaires équatoriales est effectué : on remplacerait alors, dans la formule précédente, *longitude* ou *latitude* par *ascension droite* ou *déclinaison*.

33. Au moyen des valeurs de $\alpha$ et $\theta$, puis de celles de $\frac{d\overset{+}{\delta}}{dt}$ et $\frac{d\mathrm{R}}{dt}$ que l'on calculera par les équations (IX), les dérivées de $\alpha$ et de $\theta$ se tireront des formules

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\xi = \overset{+}{\delta} - \alpha,\\
&-\rho\frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{R}\cos\xi\frac{d\overset{+}{\delta}}{dt} + \sin\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt} + \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}}\mathrm{E}\sin\mathrm{V}\cos\lambda\sin(\alpha-\nu_1)\\
&\qquad -\frac{\sqrt{f\mu}\sqrt{\Pi}}{r}\left[\sin\mathrm{I}\sin\lambda\cos(\nu_1-\Omega)\sin(\alpha-\nu_1)+\frac{\cos\mathrm{I}}{\cos\lambda}\cos(\alpha-\nu\right.\\
&\frac{d\rho}{dt} = \mathrm{R}\sin\xi\frac{d\overset{+}{\delta}}{dt} - \cos\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt} + \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}}\mathrm{E}\sin\mathrm{V}\cos\lambda\cos(\alpha-\nu_1)\\
&\qquad -\frac{\sqrt{f\mu}\sqrt{\Pi}}{r}\left[\sin\mathrm{I}\sin\lambda\cos(\nu_1-\Omega)\cos(\alpha-\nu_1)-\frac{\cos\mathrm{I}}{\cos\lambda}\sin(\alpha-\nu_\right.\\
&\frac{\rho}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\tang\theta\frac{d\rho}{dt}+\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}}\mathrm{E}\sin\mathrm{V}\sin\lambda+\frac{\sqrt{f\mu}\sqrt{\Pi}}{r}\sin\mathrm{I}\cos\lambda\cos(\nu_1-\\
&\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mathrm{R}\sin\xi\left(\frac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}-\frac{f\mu}{r^3}\right) - 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\overset{+}{\delta}}{dt} - \frac{d\alpha}{dt},\\
&\frac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}\cos\xi\left(\frac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}-\frac{f\mu}{r^3}\right) + \rho\frac{d\alpha^2}{dt^2} - \rho\frac{f\mu}{r^3},\\
&-\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}+\rho\frac{f\mu}{r^3}\right) + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + 2\rho\tang\theta\frac{d\theta^2}{dt^2},\\
&\rho\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \left(\frac{f\mu'}{\mathrm{R}^3}-\frac{f\mu}{r^3}\right)\left(\sin\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt}+\mathrm{R}\cos\xi\frac{d\xi}{dt}\right) - 2\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\rho}{dt^2}\\
&\qquad -3\mathrm{R}\sin\xi\left(\frac{f\mu'}{\mathrm{R}^4}\frac{d\mathrm{R}}{dt}-\frac{f\mu}{r^4}\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{\Pi}}\mathrm{E}\sin\mathrm{V}\right) - 3\frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.
\end{aligned}
\right. \qquad (\text{XLVI})
$$

Ajoutant actuellement aux valeurs de $\alpha$ et $\theta$, calculées suivant les formules du numéro précédent, et à leurs dérivées calculées par les formules (XLVI), les corrections de ces quantités obtenues à la fin du n° 31, on aura les valeurs corrigées de $\alpha$, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$; $\theta$, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ à l'origine du temps. Avec ces nombres, le dernier excepté, on effectuera les calculs des n$^{os}$ 27, 28 et 29.

Arrivé à ce point, on calculera la valeur de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ par la formule

$$
-\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}+\rho\frac{f\mu}{r^3}\right) + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + 2\rho\tang\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}, \qquad (\text{XLVII})
$$

dans laquelle cette dérivée est déduite des six quantités $\alpha$, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$; $\theta$ et $\frac{d\theta}{dt}$; on pourra la comparer à la valeur de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, corrigée par l'interpolation. Leur degré de concordance sera un indice de la concordance des données elles-mêmes.

Enfin, on achèvera le calcul des éléments par les formules du n° 30.

## *Application numérique à la planète Iris.*

34. Les formules relatives à la correction des éléments comprenant non-seulement celles qui sont relatives au calcul des éléments approchés, mais en outre les formules par lesquelles on passe des éléments aux dérivées de la longitude et de la latitude, nous nous bornerons à donner, pour exemple d'application numérique de notre méthode, le calcul des éléments de la planète Iris, en prenant pour point de départ ceux que nous avons publiés dans les *Comptes rendus*, tome XXV, page 549. Nous reproduisons ici ces éléments :

*Iris.*

| | | |
|---|---|---|
| Longit. moy., le 13,0 août 1847, t. m. de Paris. | 334° 12′ 35″,3 | rapportées à |
| Longitude du périhélie..... | 41.56.20,2 | l'équin. moyen |
| Longitude du nœud ascendant..... | 259.53.14,0 | du 13,0 août. |
| Inclinaison..... | 5.28.51,4 | |
| Angle (sin = excentricité)..... | 13. 6.40,2 | |
| Demi-grand axe..... | 2,3761 67. | |

Nous avons donné encore (pages 550 et 551) une éphéméride des positions apparentes d'Iris, calculée sur ces éléments, pour la fraction de jour 0,3, temps moyen de Paris, et pour tous les jours, depuis 13,3 août jusqu'au 31,3 décembre 1847. Cette éphéméride nous a fourni les positions géocentriques apparentes d'Iris, aux époques des observations que nous avons pu nous procurer. Nous avons ajouté la parallaxe et comparé le résultat aux observations. La comparaison est consignée dans le tableau suivant, dont il est bon de dire deux mots.

La lettre *m* sert à désigner les observations méridiennes.

Le nom d'un lieu d'observation mis entre parenthèses indique que nous n'avons pas cru devoir faire participer à la détermination des moyennes l'observation correspondante, soit parce qu'elle n'est pas complète, soit parce qu'elle est isolée ou ne paraît pas suffisamment concordante avec les autres.

Les moyennes et le nombre des observations qui ont servi à les former sont immédiatement inscrites après ces observations.

*Comparaison des précédents éléments d'Iris, avec les observations.*

| LIEU DE L'OBSERVATION. | DATES. Temps moyen de Paris, 1847. | ASCENSION DROITE observée.—calculée. | DÉCLINAISON observ. — calc. |
|---|---|---|---|
| Greenwich..... | Août 13,429 13 | — 2″,6 | + 0″,3 |
| *Id*..... | 14,398 15 | — 3,9 | + 3,5 |
| Cambridge..... | 435 96 | — 2,7 | + 3,5 |
| Greenwich..... | 15,381 95 | — 2,6 | + 4,2 |
| Cambridge ..... *m.* | 437 15 | + 0,9 | + 5,7 |
| Paris..... *m.* | 17,424 64 | + 1,5 | + 1,6 |
| Hambourg..... *m.* | 20,393 71 | + 0,3 | — 0,6 |
| *Id*..... | 341 48 | + 1,2 | + 6,3 |
| Greenwich..... | 457 65 | — 0,3 | + 8,5 |
| Berlin..... *m.* | 21,381 05 | + 0,4 | + 0,7 |
| *Id*..... | 429 78 | + 2,4 | — 3,7 |
| Hambourg..... *m.* | 390 49 | + 3,0 | — 0,9 |
| Gottingen..... *m.* | 397 55 | + 5,8 | + 5,1 |
| Marckree..... *m.* | 441 56 | + 2,6 | + 1,3 |
| Berlin..... | 22,428 51 | + 5,1 | — 2,8 |
| (Vienne)..... | (23,453 66) | (+ 4,7) | (+ 8,7) |
| MOYENNE DE 15 COMPAR.: | Août 18,744 58 | + 0,74 | + 2,18 |
| (Vienne)..... *m.* | Août (26,357 02) | (+ 0,6) | » |
| Londres..... | 363 75 | + 2,3 | + 3,2 |
| Paris ..... *m.* | 395 88 | + 1,4 | + 0,4 |
| Hambourg..... *m.* | 27,371 64 | + 5,6 | — 2,5 |
| Altona ..... *m.* | 371 72 | + 2,0 | — 1,6 |
| Londres..... | 382 20 | + 3,2 | + 7,9 |
| Vienne..... ..... | 388 53 | — 1,1 | + 6,1 |
| Paris..... *m.* | 392 75 | + 1,9 | + 3,6 |
| Altona..... *m.* | 28,368 65 | + 0,5 | — 1,0 |
| Paris. ..... *m.* | 389 68 | + 0,4 | + 0,3 |
| Marckree... . ..... | 462 18 | + 0,7 | + 3,5 |
| Christiania..... *m.* | 29,363 44 | + 5,1 | + 4,6 |
| Londres..... | 371 31 | + 4,6 | + 3,4 |
| Dorpat..... *m.* | 30,316 09 | + 0,1 | + 0,3 |
| Hambourg..... *m.* | 362 47 | — 3,6 | + 0,9 |
| Altona ..... *m.* | 362 57 | + 2,7 | — 0,4 |
| Christiania..... *m.* | 360 42 | + 4,1 | + 2,6 |
| Hambourg..... *m.* | 31,359 46 | + 0,2 | + 0,7 |
| Altona ..... *m.* | 359 56 | + 1,8 | — 0,2 |
| Paris..... ..... *m.* | 380 64 | + 0,8 | — 0,1 |

*Comparaison des précédents éléments d'Iris avec les observations.*

[Suite.]

| LIEU DE L'OBSERVATION. | DATES. Temps moyen de Paris, 1847. | ASCENSION DROITE observée.—calculée. | DÉCLINAISON observ. — calc. |
|---|---|---|---|
| Londres..... | Août 31,382 50 | + 1″,6 | — 0″,5 |
| *Id*..... | Sept. 1,383 26 | + 4,0 | + 2,6 |
| Hambourg..... *m.* | 2,353 49 | — 2,5 | + 0,8 |
| Altona..... *m.* | 353 58 | — 0,8 | — 0,2 |
| Londres..... | 375 20 | + 0,6 | + 1,4 |
| MOYENNE DE 24 COMPAR.: | Août 29,707 12 | + 1,48 | + 1,49 |
| Dorpat..... *m.* | Sept. 3,304 20 | + 1,6 | — 0,1 |
| Vienne..... *m.* | 439 26 | — 1,5 | — 6,5 |
| Altona..... *m.* | 4,347 73 | + 0,3 | — 0,5 |
| Paris..... *m.* | 368 82 | + 1,2 | + 0,3 |
| Hambourg..... *m.* | 5,344 85 | — 3,9 | — 0,8 |
| (Altona)..... *m.* | (6,341 58) | (+ 0,1) | » |
| Hambourg..... *m.* | 341 91 | + 2,9 | — 2,5 |
| Gottingen..... *m.* | 342 00 | + 3,6 | + 2,2 |
| Hambourg..... *m.* | 7,339 07 | — 0,5 | + 0,9 |
| Altona..... *m.* | 339 16 | — 0,8 | — 1,6 |
| (Hambourg)... .... *m.* | (8,335 80) | (— 7,0) | (— 8,6) |
| Hambourg..... *m.* | 9,333,45 | + 0,7 | — 1,2 |
| *Id*..... *m.* | 10,330 68 | — 2,9 | — 2,0 |
| Gottingen..... *m.* | 330 76 | + 2,9 | + 8,2 |
| Londres..... | 339 41 | + 3,5 | — 1,5 |
| Paris..... *m.* | 351 80 | — 1,9 | + 2,3 |
| MOYENNE DE 14 COMPAR.: | Sept. 7,060 94 | + 0,37 | — 0,20 |
| Hambourg..... *m.* | Sept. 11,327 93 | — 2,6 | + 5,2 |
| Paris..... *m.* | 349 05 | — 5,7 | — 0,8 |
| Gottingen..... *m.* | 12,325 28 | — 2,6 | + 7,6 |
| Hambourg..... *m.* | 13,322 50 | — 4,3 | + 0,8 |
| *Id*..... *m.* | 14,319 83 | — 0,4 | — 3,8 |
| *Id*..... *m.* | 15,317 17 | — 4,2 | 0,0 |
| Altona..... *m.* | 317 26 | — 3,2 | — 0,5 |
| Hambourg..... *m.* | 16,314 54 | — 4,3 | — 3,5 |
| Paris..... *m.* | 335 71 | + 5,1 | + 0,5: |
| Hambourg..... *m.* | 18,309 32 | — 2,7 | — 1,8 |

*Comparaison des précédents éléments d'Iris avec les observations.*

[Suite.]

| LIEU DE L'OBSERVATION. | DATES. Temps moyen de Paris, 1847. | ASCENSION DROITE observée.—calculée. | DÉCLINAISON observ. — calc. |
|---|---|---|---|
| (Paris)..... *m.* | Sept. (18,330 51) | (+ 5″,1) | (— 8″,7::) |
| Hambourg..... *m.* | 19,306 76 | — 5,7 | + 1,5 |
| MOYENNE DE 11 COMPAR. : | Sept. 14,870 49 | — 2,78 | + 0,47 |
| (Paris)..... *m.* | Sept. (23,317 94) | (+ 1,0) | (— 6,4) |
| Paris..... *m.* | Sept. 30,301 26 | + 1,6 | — 1,6 |
| *Id*..... *m.* | Oct. 3,294 42 | + 0,6 | 0,0 |
| MOYENNE DE 2 COMPAR. : | Oct. 1,797 84 | + 1,1 | — 0,8 |
| Paris..... *m.* | Oct. 13,272 89 | + 9,8 | — 2,7 |
| *Id*..... *m.* | 14,270 84 | + 16,7 | + 2,5 |
| *Id*..... *m.* | 15,268 77 | + 15,8 | — 1,5 |
| Marckree..... | 404 45 | + 9,1 | — 1,5 |
| Paris..... *m.* | 16,266 75 | + 14,5 | + 1,6 |
| MOYENNE DE 5 COMPAR. : | Oct. 14,896 74 | + 13,18 | — 0,32 |
| Paris..... *m.* | Oct. 22,255 00 | + 26,9 | — 2,1 |
| (Marckree)..... | (23,312 42) | (+ 35,3) | (— 7,2) |
| (Paris)..... *m.* | (26,247 45) | (+ 32,0) | » |
| Paris..... *m.* | 27,245 60 | + 33,2 | + 4,2 |
| Marckree..... *m.* | 275 52 | + 31,6 | + 5,4 |
| Paris..... *m.* | 28,243 76 | + 36,7 | + 3,8 |
| MOYENNE DE 4 COMPAR. : | Oct. 26,254 97 | + 32,10 | + 2,82 |
| (Paris)..... | Nov. (1,353 35) | (+ 49,6) | (+ 7,4) |
| Paris..... | Nov. 12,349 68 | + 77,1 | + 9,8 |
| Marckree..... | 17,329 14 | + 97,0 | + 7,7 |

*Comparaison des précédents éléments d'Iris avec les observations.*

[Suite.]

| LIEU DE L'OBSERVATION. | DATES. Temps moyen de Paris, 1847. | ASCENSION DROITE observée.—calculée. | DÉCLINAISON observ. — calc. |
|---|---|---|---|
| Paris..... | Nov. 18,293 15 | + 96″,0 | + 13″,1 |
| *Id*..... | 19,271 95 | + 103,0 | + 15,5 |
| MOYENNE DE 4 COMPAR. : | Nov. 16,810 98 | + 93,27 | + 11,52 |
| Marckree..... | Nov. 26,326 60 | + 129,0 | + 21,3 |
| (Marckree)..... | Déc. (1,337 26) | (+ 134,9) | (+ 32,4) |
| Vienne..... | 6,288 41 | + 165,3 | + 33,2 |
| *Id*..... | 9,285 42 | + 177,3 | + 33,7 |
| MOYENNE DE 3 COMPAR. : | Déc. 3,966 81 | + 157,20 | + 29,4 |
| Vienne..... | Déc. 10,266 57 | + 182,6 | + 29,8 |
| *Id*..... | 12,257 33 | + 196,4 | + 45,7 |
| *Id*..... | 13,219 34 | + 196,9 | + 37,1 |
| *Id*..... | 18,267 70 | + 220,1 | + 33,6 |
| Marckree..... | 18,296 55 | + 213,8 | + 54,2 |
| Vienne..... | 19,217 63 | + 222,5 | + 56,2 |
| MOYENNE DE 6 COMPAR. : | Déc. 15,254 19 | + 205,38 | + 42,77 |

35. Au lieu de former immédiatement les positions normales, nous allons appliquer la méthode d'interpolation de M. Cauchy aux excès moyens du tableau précédent, ou plutôt à leurs équivalents en longitude et latitude, de manière à représenter ceux-ci par des séries ordonnées suivant les puissances du temps.

Les conversions ont été faites par les formules (xxxv), et les quantités $\alpha$ et $\theta$ ont été prises dans les calculs qui nous ont servi à la construction de l'éphéméride. En procédant comme nous l'indiquons au n° **31**, les longitudes et latitudes *normales* résulteraient de la conversion des positions *normales* rapportées à l'équateur, en longitudes et latitudes.

Reproduisons d'abord les données, et remarquons, à ce sujet, que nous pourrions nous dispenser d'écrire les époques moyennes avec une précision

supérieure au centième de jour. Nous prenons pour origine du temps, le 17,3 octobre 1847, temps moyen de Paris;

et ayant multiplié le temps exprimé en jours par le nombre $k$, formule (III), c'est ce temps converti que nous désignons par $t$. L'excès moyen des observations sur le calcul est noté $\chi$; quant au poids des moyennes, faute d'autres données, il est représenté par le nombre $n'$ des observations d'où elles dérivent.

| ÉPOQUES MOYENNES. Temps moyen de Paris, 1847. | $n'$ | NOMBRE de jours compté du 17,3 oct. | log $t$ | $\chi$ OU EXCÈS de l'observation | | $n'\chi$ ou $\gamma$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | en longit. | en latit. | longitude. | latitude. |
| Août 18,744 58 | 15 | — 59,555 | 0,010 50 — | + 1″,13 | + 2″,00 | + 16″,95 | + 30″,00 |
| 29,707 12 | 24 | — 48,593 | 9,922 15 — | + 1,69 | + 1,21 | + 40,56 | + 29,04 |
| Sept. 7,060 94 | 14 | — 40,239 | 9,840 23 — | + 0,32 | — 0,26 | + 4,48 | — 3,64 |
| 14,870 49 | 11 | — 32,430 | 9,746 52 — | — 2,58 | + 0,93 | — 28,38 | + 10,23 |
| Oct. 1,797 84 | 2 | — 15,502 | 9,425 97 — | + 0,90 | — 0,98 | + 1,80 | — 1,96 |
| 14,896 74 | 5 | — 2,403 | 8,616 38 — | + 12,52 | — 2,89 | + 62,60 | — 14,45 |
| 26,254 97 | 4 | + 8,955 | 9,187 65 + | + 31,18 | — 4,15 | + 124,72 | — 16,60 |
| Nov. 16,810 98 | 4 | + 30,511 | 9,720 04 + | + 91,28 | —12,95 | + 365,12 | — 51,80 |
| Déc. 3,966 81 | 3 | + 47,667 | 9,913 80 + | +156,75 | —18,39 | + 470,25 | — 55,17 |
| 15,254 19 | 6 | + 58,954 | 0,006 10 + | +206,36 | —25,09 | +1238,16 | —150,54 |

M. Cauchy ayant donné un exemple de l'application de sa méthode d'interpolation, nous ne croyons pas devoir présenter ici le détail des calculs effectués suivant les formules du tableau du n° **23**; nous nous bornerons à présenter les résultats.

Voici les logarithmes des sommes *subordonnées* qui dépendent du temps seulement, et les logarithmes des coefficients $\alpha_0$; $\beta_0$, $\beta_1$; $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\gamma_2$; . . ., qui s'en déduisent.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| l. SA | 1,944 48 + | l. SB | 1,609 98 − | l. SC | 1,717 18 + | l. SD | 1,450 75 − | l. SE | 1,607 87 + | l. SF | 1,339 18 − |
| | | l. S′ΔB | 1,636 09 + | l. S′ΔC | 0,975 25 − | l. S′ΔD | 1,509 65 + | l. S′ΔE | 0,783 54 − | l. S′ΔF | 1,436 50 + |
| | | | | l. S″Δ²C | 1,351 85 + | l. S″Δ²D | 0,825 87 − | l. S″Δ²E | 1,420 83 + | l. S″Δ²F | 0,936 27 − |
| | | | | | | l. S‴Δ²D | 1,115 81 + | l. S‴Δ²E | 0,850 46 − | l. S‴Δ²F | 1,290 21 + |
| | | | | | | | | l. S$^{IV}$Δ⁴E | 0,782 98 + | l. S$^{IV}$Δ⁴F | 0,531 11 − |
| | | | | | | | | | | l. S$^{V}$Δ⁵F | 0,521 77 + |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| l. $\alpha_0$ | 8,055 52 + | | | | | | | | | | | | | | |
| l. $\beta_0$ | 8,029 41 + | l. $\beta_1$ | 8,363 91 + | | | | | | | | | | | | |
| l. $\gamma_0$ | 8,339 61 − | l. $\gamma_1$ | 7,987 31 + | l. $\gamma_2$ | 8,648 15 + | | | | | | | | | | |
| l. $\delta_0$ | 8,118 54 − | l. $\delta_1$ | 8,718 21 − | l. $\delta_2$ | 8,358 20 + | l. $\delta_3$ | 8,884 19 + | | | | | | | | |
| l. $\varepsilon_0$ | 8,157 78 + | l. $\varepsilon_1$ | 8,903 58 − | l. $\varepsilon_2$ | 9,221 53 − | l. $\varepsilon_3$ | 8,951 67 + | l. $\varepsilon_4$ | 9,217 02 + | | | | | | |
| l. $\iota_0$ | 8,336 73 + | l. $\iota_1$ | 8,778 83 + | l. $\iota_2$ | 9,275 32 − | l. $\iota_3$ | 9,553 86 − | l. $\iota_4$ | 9,226 35 + | l. $\iota_5$ | 9,478 23 + | | | | |

Les logarithmes des sommes *subordonnées* relatives aux longitudes et latitudes sont :

| | Longitudes. | Latitudes. |
|---|---|---|
| l. S$\gamma$ | 3,361 02 + | 2,351 97 − |
| l. S′Δ$\gamma$ | 3,514 92 + | 2,661 22 − |
| l. S″Δ²$\gamma$ | 3,238 70 + | 2,166 90 − |
| l. S‴Δ²$\gamma$ | 2,592 07 + | 1,644 3. − |
| l. S$^{IV}$Δ⁴$\gamma$ | 2,246 4. − | 1,367 2. + |
| l. S$^{V}$Δ⁵$\gamma$ | 1,256 .. + | 0,868 .. + |

Donnons actuellement les valeurs des différents termes dont se composent les expressions des coefficients $a$, $b$, $c$, ....

LONGITUDES.

| DANS..... | | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Termes provenant de | $Sy$ | + 26″,09 | | | | | |
| | $S\,\Delta y$ | + 35,02 | + 75″,654 | | | | |
| | $S''\Delta^2 y$ | − 37,87 | + 16,827 | + 77″,062 | | | |
| | $S'''\Delta^3 y$ | − 5,14 | − 20,432 | + 8,918 | + 29″,940 | | |
| | $S^{IV}\Delta^4 y$ | − 2,54 | + 14,125 | + 29,373 | − 15,779 | − 29″,07 | |
| | $S^{V}\Delta^5 y$ | + 0,39 | + 1,084 | − 3,400 | − 6,458 | + 3,04 | + 5″,42 |

LATITUDES.

| DANS..... | | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Termes provenant de | $Sy$ | − 2″,56 | | | | | |
| | $S'\Delta y$ | − 4,90 | − 10″,596 | | | | |
| | $S''\Delta^2 y$ | + 3,21 | − 1,426 | − 6″,532 | | | |
| | $S'''\Delta^3 y$ | + 0,58 | + 2,304 | − 1,006 | − 3″,377 | | |
| | $S^{IV}\Delta^4 y$ | + 0,33 | − 1,865 | − 3,879 | + 2,084 | + 3″,84 | |
| | $S^{V}\Delta^5 y$ | + 0,16 | + 0,443 | − 1,391 | − 2,641 | + 1,24 | + 2″,31 |

Pour distinguer à quelle somme $S^{\nu-1}\Delta^{\nu-1}y$ il est convenable de s'arrêter dans les valeurs de $a$, $b$, $c$, ..., il devient nécessaire d'avoir sous les yeux les erreurs $\Delta y$, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... que l'on commet en s'arrêtant à $Sy$, $S'\Delta y$, $S''\Delta^2 y$, .... Voici les valeurs de ces restes qui se rapportent non aux moyennes, mais aux sommes algébriques des excès des $n'$ observations qui ont concouru à la formation des moyennes.

## LONGITUDES.

| DATES. 1847. | $n'$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ | $\Delta^5 y$ | $\Delta^6 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Août 18,7 | 15 | − 374″,46 | + 262″,82 | −123″,75 | − 18″,17 | + 0″,34 | + 2″,15 |
| 29,7 | 24 | − 585,69 | + 91,56 | + 45,75 | + 29,29 | + 0,39 | − 3,21 |
| Sept. 7,1 | 14 | − 360,83 | − 117,97 | + 58,37 | + 11,48 | + 7,00 | + 7,15 |
| 14,9 | 11 | − 315,41 | − 236,39 | + 19,65 | − 22,58 | − 7,72 | − 6,08 |
| Oct. 1,8 | 2 | − 50,39 | − 80,08 | − 6,32 | − 7,08 | + 1,04 | + 1,06 |
| 14,9 | 5 | − 67,87 | − 227,33 | − 34,91 | − 13,50 | + 1,94 | + 0,22 |
| 26,3 | 4 | + 20,35 | − 166,35 | − 29,85 | + 2,31 | + 2,29 | + 0,34 |
| Nov. 16,8 | 4 | + 260,75 | − 38,16 | − 6,92 | + 29,37 | − 4,56 | − 2,71 |
| Déc. 4,0 | 3 | + 391,97 | + 100,81 | + 17,59 | + 15,75 | − 5,11 | − 1,57 |
| 15,3 | 6 | +1081,60 | + 411,13 | + 60,43 | − 26,84 | + 4,41 | + 2,66 |

## LATITUDES.

| DATES. 1847. | $n'$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ | $\Delta^5 y$ | $\Delta^6 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Août 18,7 | 15 | + 68″,33 | − 20″,93 | + 11″,84 | − 0″,07 | − 2″,51 | − 1″,77 |
| 29,7 | 24 | + 90,37 | − 4,48 | − 0,60 | + 1,26 | + 5,08 | + 3,61 |
| Sept. 7,1 | 14 | + 32,14 | − 1,87 | − 16,82 | − 11,53 | −10,94 | −10,88 |
| 14,9 | 11 | + 38,34 | + 27,27 | + 5,56 | + 10,32 | + 8,36 | + 9,03 |
| Oct. 1,8 | 2 | + 3,15 | + 7,31 | + 1,06 | + 1,15 | + 0,08 | + 0,09 |
| 14,9 | 5 | − 1,67 | + 20,66 | + 4,37 | + 1,95 | − 0,09 | − 0,79 |
| 26,3 | 4 | − 6,38 | + 19,77 | + 8,20 | + 4,57 | + 4,57 | + 3,77 |
| Nov. 16,8 | 4 | − 41,58 | + 0,28 | − 2,37 | − 6,46 | − 1,98 | − 1,22 |
| Déc. 4,0 | 3 | − 47,50 | − 6,72 | + 0,33 | + 0,54 | + 3,30 | + 4,75 |
| 15,3 | 6 | − 135,21 | − 41,31 | − 11,58 | − 1,74 | − 5,87 | − 6,59 |

Nous allons, maintenant, donner le résultat de la division des divers restes par les valeurs de $n'$, afin de mettre en évidence les erreurs moyennes qui répondent à une observation; il suffit que nous présentions les différences des derniers ordres.

| DATES. 1847. | $n'$ | LONGITUDES. $\frac{1}{n'}\Delta^4 y$ | LONGITUDES. $\frac{1}{n'}\Delta^5 y$ | LONGITUDES. $\frac{1}{n'}\Delta^6 y$ | LATITUDES. $\frac{1}{n'}\Delta^3 y$ | LATITUDES. $\frac{1}{n'}\Delta^4 y$ | LATITUDES. $\frac{1}{n'}\Delta^5 y$ | LATITUDES. $\frac{1}{n'}\Delta^6 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Août 18,7 | 15 | − 1″,21 | + 0″,02 | + 0″,14 | + 0″,79 | 0″,00 | − 0″,17 | − 0″,12 |
| 29,7 | 24 | + 1,22 | + 0,02 | − 0,13 | − 0,03 | + 0,05 | + 0,21 | + 0,15 |
| Sept. 7,1 | 14 | + 0,82 | + 0,50 | + 0,51 | − 1,20 | − 0,82 | − 0,78 | − 0,78 |
| 14,9 | 11 | − 2,06 | − 0,70 | − 0,55 | + 0,51 | + 0,94 | + 0,76 | + 0,82 |
| Oct. 1,8 | 2 | − 3,54 | + 0,52 | + 0,53 | + 0,53 | + 0,57 | + 0,04 | + 0,04 |
| 14,9 | 5 | − 2,70 | + 0,39 | + 0,04 | + 0,87 | + 0,39 | − 0,02 | − 0,16 |
| 26,3 | 4 | + 0,58 | + 0,57 | + 0,08 | + 2,05 | + 1,14 | + 1,14 | + 0,94 |
| Nov. 16,8 | 4 | + 7,34 | − 1,14 | − 0,68 | − 0,59 | − 1,62 | − 0,50 | − 0,30 |
| Déc. 4,0 | 3 | + 5,25 | − 1,70 | − 0,52 | + 0,11 | + 0,18 | + 1,10 | + 1,58 |
| 15,3 | 6 | − 4,47 | + 0,73 | + 0,44 | − 1,93 | − 0,29 | − 0,98 | − 1,10 |

En examinant ce tableau ou le précédent, on reconnaît que les $\Delta$ ne subissent pas de réductions notables, après les $\Delta^4$ pour les longitudes, et les $\Delta^2$ pour les latitudes : on pourrait en induire que les restes $\Delta^5$ sont négligeables dans les premières, et les $\Delta^3$ dans les secondes. Néanmoins, j'ai cru devoir tenir compte des $\Delta^5$ dans les expressions des longitudes.

Formant les valeurs de $a, b, c, \ldots$, en négligeant les $S^{VI}\Delta^6 y$ et suivantes dans les longitudes, puis les $S'''\Delta^3 y$ et suivantes dans les latitudes, il vient

$$\text{Longit.} : \begin{cases} a = +15'',95, \quad b = +87'',25, \quad c = +111'',95, \\ d = +7'',70, \quad e = -26'',03, \quad f = +5'',42; \end{cases}$$

$$\text{Latit.} : \quad a = -4'',25, \quad b = -12'',02, \quad c = -6'',53.$$

Au moyen de ces quantités, substituées dans le second membre de l'équation (113) complété, dans le cas des longitudes, par le terme $\frac{1}{n'}\Delta^6 y$, et dans le cas des latitudes, par le terme $\frac{1}{n'}\Delta^3 y$, on reproduirait les valeurs des excès moyens $\chi$ donnés au commencement de ce numéro.

Ayant converti les $b, c, d, \ldots$, en nombres abstraits, les formules (xxxvi) donnent

$$\delta\alpha = +15'',95, \quad \delta\frac{d\alpha}{dt} = +0,000\,4230, \quad \delta\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +0,001\,0855,$$

$$\delta\frac{d^3\alpha}{dt^3} = +0,000\,2240;$$

$$\delta\theta = -4'',25, \quad \delta\frac{d\theta}{dt} = -0,000\,0583, \quad \delta\frac{d^2\theta}{dt^2} = -0,000\,0633.$$

*Calcul des valeurs de $\alpha$, $\theta$ et de leurs dérivées,*

le 17, 3 octobre 1847, temps moyen de Paris.

36. Les valeurs de $\mathfrak{Z}$ et $\log R$, tirées du *Nautical Almanach*, et corrigées par les formules (VIII), sont

$\mathfrak{Z} = 383^\circ 48' 1'',23$ compté de l'équinoxe vrai, $\text{l. R} = 9,998\ 1979.$

Au lieu de déduire leurs dérivées des formules (IX), je les ai déduites de l'interpolation, par la méthode de M. Cauchy, appliquée aux valeurs de $\mathfrak{Z}$ et $\log R$ corrigées par les formules (VIII); j'ai trouvé ainsi

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = +1,008\ 1952 \qquad \text{l.}\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = 0,003\ 5446+$$

$$\text{l.}\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = 8,214\ 339.-$$

$$\text{l.}\frac{dR}{dt} = 8,212\ 537.-$$

Les valeurs que l'on obtient par les équations (IX) sont peu différentes. On tire des éléments les constantes ci-après :

$$\varepsilon - \varpi = -\ 67^\circ 43' 44'',9 \qquad \text{l. N}'' = 2,986\ 1911+$$

$$\varpi - \Omega = \ 142\ 3\ 6,2 \qquad \text{l.}-\frac{E}{\sin 1''} = 4,670\ 1466-$$

$$\text{l. tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right) = 0,100\ 2597+$$

$$\text{l. A cos}\,\eta = 0,364\ 4054+$$

$$\text{l. cos I} = 9,998\ 0098+$$

$$\text{l. tang I} = 8,982\ 0613+$$

*Calcul de $\alpha$ et $\theta$.*

(XXXVII) Du 13,0 août, au 17,3 oct.; 65,3 j. l.... 1,814 9132+

$\text{N}'' t = \ 17^\circ 34' 16'',38$ l.... 4,801 1043+

$\text{N}'' t + \varepsilon - \varpi = -\ 50\ 9\ 28,52$

Soit $u = -\ 61\ 35\ 22,64$ $\text{l. sin}\,u = 9,944\ 2667-$

$-\frac{E}{\sin 1''}\sin u = +\ 11\ 25\ 54,11$ l.... 4,614 4133+

$u - \frac{E}{\sin 1''}\sin u = -\ 50\ 9\ 28,53$

Erreur = $+0'',01$

(XXXVIII) $\frac{1}{2}u = -\ 30^\circ 47' 41'',32$ $\text{l. tang}\frac{1}{2}u = 9,775\ 2440-$

*Calcul de* $\frac{d\rho}{dt}$.

(XLVI) $R \sin \xi \frac{d\overset{\star}{\odot}}{dt} = +0,997\ 9620$ l....9,999 1140

$-\cos\xi \frac{dR}{dt} = +0,001\ 7894$ l....7,252 702.

3e terme $= -0,127\ 6549$ l....9,106 0376

$\sin I \sin\lambda \cos(\nu_1 - \Omega)\cos(\alpha - \nu_1) = +0,002\ 7839$ l....7,444 6511

$-\frac{\cos I}{\cos\lambda}\sin(\alpha - \nu_1) = +0,468\ 5260$ l....9,670 7337

Parenth. du 4e terme $= +0,471\ 3099$ l....9,673 3066

4e terme $= -0,333\ 8072$ l....9,523 4957

$\frac{d\rho}{dt} = +0,538\ 2893$ l. $\frac{d\rho}{dt} = 9,731\ 0157$

*Calcul de* $\frac{d\theta}{dt}$.

$-\tang\theta \frac{d\rho}{dt} = -0,057\ 65750$ l....8,760 8558

2e terme $= -0,012\ 87255$ l....8,109 6645

l. $\sin I \cos\lambda \cos(\nu_1 - \Omega) = 8,548\ 8150$

3e terme $= +0,025\ 06132$ l....8,399 0041

$\frac{\rho}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = -0,045\ 46873$ l....8,657 7128

l. $\cos^2\theta = 9,995\ 0456$

c. l. $\rho = 9,755\ 5473$

$\frac{d\theta}{dt} = -0,025\ 60387$ l. $\frac{d\theta}{dt} = 8,408\ 3057$

*Calcul de* $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$.

l. $R^3 = 9,994\ 5937$

$\frac{f\mu'}{R^3} = +1,012\ 5263$ l....0,005 4063

l. $r^3 = 0,978\ 8316$

$-\frac{f\mu}{r^3} = -0,104\ 9946$ l....9,021 1672

$\frac{f\mu'}{R^3} - \frac{f\mu}{r^3} = +0,907\ 5317$ l....9,957 8618

(XLVI)

| | |
|---|---|
| 1er terme $= +0{,}898\ 3202$ | l. $\ldots 9{,}953\ 4312 +$ |
| | l. $2 = 0{,}301\ 0300 +$ |
| $-2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = -0{,}283\ 5889$ | l. $\ldots 9{,}452\ 6891 -$ |
| $\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +0{,}614\ 7313$ | l. $\ldots 9{,}788\ 6853 +$ |
| $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +0{,}350\ 1327$ | l. $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 9{,}544\ 2326 +$ |

*Calcul de* $\frac{d\xi}{dt}$.

| | |
|---|---|
| $\frac{d\xi}{dt} = +0{,}744\ 7784$ | l. $\frac{d\xi}{dt} = 9{,}872\ 0271 +$ |

*Calcul de* $\frac{d^2\rho}{dt^2}$.

| | |
|---|---|
| 1er terme $= +0{,}099\ 13441$ | l. $\ldots 8{,}996\ 2244 +$ |
| | l. $\frac{d\alpha^2}{dt^2} = 8{,}841\ 2868 +$ |
| $\rho\frac{d\alpha^2}{dt^2} = +0{,}121\ 82588$ | l. $\ldots 9{,}085\ 7395 +$ |
| $\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho\frac{f\mu}{r^3} = +0{,}220\ 96029$ | l. $\ldots 9{,}344\ 3143 +$ |
| $-\rho\frac{f\mu}{r^3} = -0{,}184\ 34013$ | l. $\ldots 9{,}265\ 6199 -$ |
| $\frac{d^2\rho}{dt^2} = +0{,}036\ 62016$ | l. $\frac{d^2\rho}{dt^2} \ldots 8{,}563\ 7202 +$ |

*Calcul de* $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

| | |
|---|---|
| | l. $\sin\theta\cos\theta = 9{,}024\ 8857 +$ |
| 1er terme $= +0{,}023\ 39914$ | l. $\ldots 8{,}369\ 2000 +$ |
| 2e terme $= -0{,}027\ 56458$ | l. $\ldots 8{,}440\ 3514 -$ |
| | l. $2\rho = 0{,}545\ 4827 +$ |
| | l. $\frac{d\theta^2}{dt^2} = 6{,}816\ 6114 +$ |
| 3e terme $= +0{,}000\ 24657$ | l. $\ldots 6{,}391\ 9342 +$ |
| $-\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} = -0{,}003\ 91887$ | l. $\ldots 7{,}593\ 1609 -$ |
| $\frac{d^2\theta}{dt^2} = +0{,}002\ 23207$ | l. $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 7{,}348\ 7082 +$ |

*Calcul de* A′.

(x)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +0{,}175\ 6091$$

$$\frac{3}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +0{,}526\ 8273$$

$$\frac{2}{R}\frac{dR}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = -0{,}008\ 6439 \qquad \text{l.}\ldots 7{,}936\ 709. -$$

$$\text{Somme} = +0{,}518\ 1834 \qquad \text{l.}\ldots 9{,}714\ 4835 +$$

$$\text{l. } f\mu' \frac{\sin\xi}{R^2} = 0{,}000\ 9720 +$$

$$1^{er}\text{ terme} = +0{,}519\ 3445 \qquad \text{l.}\ldots 9{,}715\ 4555 +$$

$$\text{l.}\left(3\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\overset{+}{\circlearrowleft}}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt} = 8{,}757\ 1507 -$$

$$\text{l. } f\mu' \frac{\cos\xi}{R^2} = 9{,}044\ 0731 +$$

$$2^{e}\text{ terme} = -0{,}006\ 3274 \qquad 7{,}801\ 2238 -$$

$$A' = +0{,}513\ 0171$$

*Calcul de* B′.

$$-\tan\theta\frac{d\theta}{dt} = +0{,}002\ 7482 \qquad \text{l.}\ldots 7{,}439\ 0486 +$$

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - \tan\theta\frac{d\theta}{dt} = -0{,}013\ 6327 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}134\ 5831 -$$

$$-2\tan\theta\frac{d\theta}{dt} = +0{,}005\ 4964$$

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - 3\tan\theta\frac{d\theta}{dt} = -0{,}008\ 1363 \qquad \text{l.}\ldots 7{,}910\ 43.. -$$

$$\sin\xi\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - 3\tan\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = -0{,}008\ 0871 \qquad \text{l.}\ldots 7{,}907\ 79.. -$$

$$-\cos\xi\left(3\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\overset{+}{\curvearrowright}}{dt}\right) = +0{,}023\ 7836 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}376\ 279. +$$

$$\text{Somme} = +0{,}015\ 6965 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}195\ 803. +$$

$$\text{l. } f\mu R\frac{d\alpha}{dt} = 9{,}419\ 5370 +$$

$$\text{l. } B' = 7{,}615\ 340. +$$

(1) *Calcul de* C'.

$\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - \text{tang}\,\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt} = -0,003\ 5969$ l....7,555 923. —

$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +0,175\ 6091$

l. $\sin\xi\cos\xi = 9,037\ 8367+$

l. $\frac{1}{2}\frac{f\mu'}{R^3} = 9,704\ 3763+$

$\frac{1}{2}\frac{f\mu'}{R^3}\sin\xi\cos\xi = +0,055\ 2348$ l....8,742 2130+

Somme $= +0,227\ 2470$ l....9,356 4982+

l. $-3f\mu = 0,477\ 1200-$

l. $R^3\sin\xi = 9,991\ 9615+$

l. $C' = 9,825\ 5797-$

*Calcul de* D'.

l. $\frac{f\mu}{2} = 9,698\ 9688+$

l. $D' = 9,205\ 8870+$

*Calcul de* A''.

l. $\frac{d\alpha^3}{dt^3} = 8,264\ 0209+$

$2\frac{d\alpha^3}{dt^3} = +0,036\ 7325$ l....8,565 0509+

$\frac{d^3\alpha}{dt^3} + 2\frac{d\alpha^3}{dt^3} = -0,246\ 5078$ l....9,391 8305—

1er terme $= -0,065\ 03854$ l....8,813 1708—

l. $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)^2 = 9,091\ 1540+$

l. $-\frac{3}{2} = 0,176\ 0913-$

2e terme $= -0,185\ 03136$ l....9,267 2453—

A'' $= -0,250\ 0699$

*Calcul de* B''.

l. B'' $= 9,143\ 7094-$

*Calcul de* C″.

| | | |
|---|---|---|
| (x) $\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - 2\tang\theta\frac{d\theta}{dt}$ | $= -0,010\ 88454$ | l....8,036 8099 − |
| $\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - 2\tang\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt}$ | $= -0,002\ 87178$ | l....7,458 1502 − |
| Facteur de $\cos\xi$ | $= +0,172\ 7373$ | l....9,237 3861 + |
| 1er terme de la parent. princip. | $= +0,018\ 96077$ | l....8,277 8550 + |
| | | l. $\frac{1}{2\cos^2\theta} = 9,703\ 9226$ + |
| $\frac{1}{2\cos^2\theta}\frac{f\mu'}{R^3}$ | $= +0,512\ 0695$ | l....9,709 3289 + |
| $-\frac{d\xi}{dt}\frac{d\alpha}{dt}$ | $= -0,196\ 3905$ | l....9,293 1206 − |
| Somme | $= +0,315\ 6790$ | l....9,499 2457 + |
| 2e terme de la parent. princip. | $= +0,313\ 7713$ | l....9,496 6132 + |
| Parenthèse principale | $= +0,332\ 7321$ | l....9,522 0947 + |
| | | l. $R^2\sin\xi = 9,993\ 7636$ + |
| | | l. C″ $= 9,992\ 9783$ − |

*Calcul de* D″.

l. $\frac{3}{2}(f\mu)^2R^2\sin^2\xi = 0,167\ 2202$ +

l. D″ $= 0,172\ 1728$ +

*Calcul de* $\cos x$ *et* $\sin^2 x$.

| | |
|---|---|
| $\cos x = -0,109\ 1422$ | l....9,037 9926 − |
| | l. $\sin x = 9,997\ 3978$ ± |
| $\sin^2 x = +0,988\ 0879$ | l....9,994 7956 + |

*Résolution des équations* (XI) *et* (XII).

En supposant l. $r = 0,326\ 2772$, valeur correspondante aux éléments primitifs n° 36, on trouve

| | | |
|---|---|---|
| (XI) et (XII) | $\Phi = -0,000\ 4546$ | l....6,657 63.. − |
| (XII *bis*) | $\frac{d\Phi}{dr} = -0,177\ 224$ | l....9,248 52.. − |
| d'où | $\delta r = -0,002\ 5651$ | l....7,409 11.. − |

La valeur corrigée de $r$ que l'on en déduit laisse une erreur $\Phi$ égale à

$$-0,000\ 0005$$

La valeur de $r$ qui satisfait aux équations (xi) et (xii) est

| | | |
|---|---|---|
| | $r = 2,117\ 1457$ | l. $r = 0,325\ 7508 +$ |
| (xi) | | l. $\frac{r}{R} = 0,327\ 5529 +$ |
| | $\frac{r^2}{R^2} = 4,519\ 6604$ | l. $\frac{r^2}{R^2} = 0,655\ 1058 +$ |
| | $\frac{r^2}{R^2} - \sin^2 x = 3,531\ 5725$ | l. . . . $0,547\ 9681 +$ |
| | $+\sqrt{\frac{r^2}{R^2} - \sin^2 x} = 1,879\ 2480$ | l. . . . $0,273\ 9841 +$ |
| | $\frac{\rho}{R \cos\theta} = 1,770\ 1058$ | l. . . . $0,247\ 9992 +$ |
| | | l. $R \cos\theta = 9,995\ 7216 +$ |
| | | l. $\rho = 0,243\ 7208 +$ |
| (xii) | | c. l. $r = 9,674\ 2492 +$ |
| | | c. l. $r^2 = 9,022\ 7476 +$ |
| | | c. l. $r^4 = 8,371\ 2460 +$ |
| | | c. l. $r^6 = 7,393\ 9936 +$ |
| | $A' = +0,513\ 0171$ | |
| | $\frac{B'}{r^3} = +0,000\ 4346$ | l. . . . $6,638\ 088. +$ |
| | $\frac{C'}{r^5} = -0,015\ 7335$ | l. . . . $8,196\ 8257 -$ |
| | $\frac{D'}{r^8} = +0,000\ 3980$ | l. . . . $6,599\ 8806 +$ |
| | Somme $= +0,498\ 1162$ | |
| | $A'' = -0,250\ 0699$ | |
| | $\frac{B''}{r^3} = -0,014\ 6709$ | l. . . . $8,166\ 4570 -$ |
| | $\frac{C''}{r^5} = -0,023\ 1326$ | l. . . . $8,364\ 2243 -$ |
| | $\frac{D''}{r^8} = +0,003\ 6827$ | l. . . . $7,566\ 1664 +$ |
| | Somme $= -0,284\ 1907$ | l. . . . $9,453\ 6099 -$ |
| | Dernier terme $= -0,498\ 1162$ | l. . . . $9,697\ 3307 -$ |
| | $\Phi = 0,000\ 0000$ | |

L'équation (xii) est satisfaite.

*Calcul des dérivées de ρ et de r.*

La planète étant plus près de la station que de l'opposition, nous emploierons les formules (XIV).

*Calcul de* $\frac{d^2\rho}{dt^2}$.

(XIV) $-\frac{f\mu}{r^3} = -0,105\ 3771$ | l....9,022 7464 —

$\frac{f\mu'}{R^3} - \frac{f\mu}{r^3} = +0,907\ 1492$ | l....9,957 6787 +

$R\cos\xi\left(\frac{f\mu'}{R^3} - \frac{f\mu}{r^3}\right) = +0,099\ 16204$ l....8,996 3455 +

$\rho\frac{d\alpha^2}{dt^2} = +0,122\ 01168$ l....9,086 4014 +

$-\rho\frac{f\mu}{r^3} = -0,184\ 70013$ l....9,266 4672 —

$\frac{d^2\rho}{dt^2} = +0,036\ 47359$ l. $\frac{d^2\rho}{dt^2} = 8,561\ 9785$ +

*Calcul de* Q.

$\rho\cos\xi = +0,192\ 3932$ | l....9,284 1897 +

$R + \rho\cos\xi = +1,188\ 2523$ | l....0,074 9086 +

$(R+\rho\cos\xi)\frac{dR}{dt} = -0,019\ 3841$ l....8,287 446. —

l. $-\rho R\sin\xi = 0,239\ 2865$ —

$-\rho R\sin\xi\frac{d\xi}{dt} = -1,291\ 4179$ l....0,111 0668 —

l. $\frac{\rho}{\cos^2\theta} = 0,248\ 6734$ +

l. $\frac{\rho^2}{\cos^2\theta} = 0,492\ 3942$ +

$\frac{\rho^2}{\cos^2\theta}\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{dt} = -0,008\ 5397$ l....7,931 443. —

$Q = -1,319\ 3417$ l. $Q = 0,120\ 3572$ —

*Calcul de* Q'.

$2\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\rho}{dt^2} = +0,019\ 2464$ l....8,284 3488 +

l. $\frac{3}{R}\frac{dR}{dt} = 8,691\ 460.$ —

2e terme $= -0,049\ 2529$ l....8,692 432. —

(XIV)

$$\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -0{,}496\ 4505 \qquad \text{l.}\ldots 9{,}695\ 8759-$$

$$\sin\xi\frac{dR}{dt} = -0{,}016\ 21456 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}209\ 905.-$$

$$R\cos\xi\frac{d\xi}{dt} = +0{,}081\ 36677 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}910\ 4471+$$

$$\text{Somme} = +0{,}065\ 15221 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}813\ 9292+$$

$$4^e\ \text{terme} = -0{,}059\ 10278 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}771\ 6079-$$

$$Q' = -0{,}585\ 5598 \qquad \text{l. } Q' = 9{,}767\ 5712-$$

*Calcul de* $r\frac{dr}{dt}$.

$$\frac{\rho}{\cos^2\theta} = +1{,}772\ 8560$$

$$R\cos\xi + \frac{\rho}{\cos^2\theta} = +1{,}882\ 1677 \qquad \text{l.}\ldots 0{,}274\ 6583+$$

$$\text{l. } -\frac{1}{3}Q' = 9{,}290\ 4500+$$

$$\text{l. } -\frac{f\mu R\sin\xi}{r^3} = 8{,}366\ 8105-$$

$$Q\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -0{,}463\ 3767 \qquad \text{l.}\ldots 9{,}665\ 9342-$$

$$2^e\ \text{terme du numérat.} = +0{,}367\ 3739 \qquad \text{l.}\ldots 9{,}565\ 1083+$$

$$\text{Numérateur} = -0{,}096\ 0028 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}982\ 2839-$$

$$2^e\ \text{terme du dénomin.} = -0{,}043\ 7995 \qquad \text{l.}\ldots 8{,}641\ 4688-$$

$$\text{Dénominateur} = +0{,}307\ 4187 \qquad \text{l.}\ldots 9{,}487\ 7304+$$

$$r\frac{dr}{dt} = -0{,}312\ 2868 \qquad \text{l. } r\frac{dr}{dt} = 9{,}494\ 5535-$$

*Calcul de* $\frac{d\rho}{dt}$.

$$r\frac{dr}{dt} - Q = +1{,}007\ 0548 \qquad \text{l.}\ldots 0{,}003\ 0531+$$

$$\text{l. } \frac{d\rho}{dt} = 9{,}728\ 3948+$$

*Vérification.*

(XIV *bis*) $2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = +0{,}282\ 3353$ l....9,450 7651 +

$\rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +0{,}615\ 5987$ l....9,789 2978 +

Somme $= +0{,}897\ 9340$

$-R\sin\xi\left(\frac{f_\mu'}{R^3} - \frac{f_\mu}{r^3}\right) = -0{,}897\ 9340$ l....9,953 2444 —

Erreur $= 0{,}000\ 0000$

*Vérification de la concordance des données.*

(XLVII) $\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho\frac{f_\mu}{r^3} = +0{,}221\ 17372$ l....9,344 7335 +

1er terme $= +0{,}023\ 41729$ l....8,369 5366 +

$2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} = -0{,}027\ 46109$ l....8,438 7177 —

l. $2\frac{d\theta}{dt} = 8{,}710\ 3229$ —

$2\rho\tan\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} = +0{,}000\ 24723$ l....6,393 0923 +

$-\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} = -0{,}003\ 79657$ l....7,579 391. —

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = +0{,}002\ 1661$ l....7,335 670. +

**Or nous avons déduit de l'interpolation, n° 38,**

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = +0{,}002\ 1688$$

Discordance $= -0{,}000\ 0027$

d'où

$$\delta\frac{1}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} = \delta c = -0'',28.$$

Cette discordance, pour $t = 1$, c'est-à-dire environ deux mois après le 17,3 octobre, donne lieu à une erreur de $-0'',28$ dans le terme du développement de la latitude qui dépend du carré du temps; elle est donc insensible. Nous verrons plus loin que les latitudes seront en effet assez bien représentées.

39. *Calcul des coordonnées de la Terre et des composantes de sa vitesse.*

(XVI)

| | |
|---|---|
| | l. sin ☿ = 9,605 8982 + |
| | l. cos ☿ = 9,961 4009 + |
| $x' = +0{,}911\ 1688$ | l. $x' = 9{,}959\ 5988$ + |
| $y' = +0{,}401\ 8797$ | l. $y' = 9{,}604\ 0961$ + |
| $\frac{x'}{R}\frac{dR}{dt} = -0{,}014\ 9258$ | l. . . . 8,173 938. — |
| $-y'\frac{d☿}{dt} = -0{,}405\ 1732$ | l. . . . 9,607 6407 — |
| $\frac{dx'}{dt} = -0{,}420\ 0990$ | |
| $\frac{y'}{R}\frac{dR}{dt} = -0{,}006\ 5832$ | l. . . . 7,818 4356 — |
| $x'\frac{d☿}{dt} = +0{,}918\ 6359$ | l. . . . 9,963 1431 + |
| $\frac{dy'}{dt} = +0{,}912\ 0527$ | |

*Calcul des coordonnées d'Iris et des composantes de sa vitesse.*

(XVII)

| | |
|---|---|
| | l. sin α = 9,937 0825 - |
| | l. cos α = 9,700 3088 + |
| $\rho\cos\alpha = +0{,}879\ 0824$ | l. $\rho\cos\alpha = 9{,}944\ 0296$ + |
| $\rho\sin\alpha = -1{,}516\ 3634$ | l. $\rho\sin\alpha = 0{,}180\ 8033$ — |
| $x = +1{,}790\ 2512$ | l. $x = 0{,}252\ 9140$ + |
| $y = -1{,}114\ 4837$ | l. $y = 0{,}047\ 0737$ — |
| | l. $z = 9{,}273\ 4765$ + |
| $\cos\alpha\frac{d\rho}{dt} = +0{,}268\ 35123$ | l. . . . 9,428 7036 + |
| $-\rho\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} = +0{,}400\ 07703$ | l. . . . 9,602 1436 + |
| $\frac{dx}{dt} = +0{,}248\ 32926$ | l. $\frac{dx}{dt} = 9{,}395\ 0279$ + |
| $\sin\alpha\frac{d\rho}{dt} = -0{,}462\ 8895$ | l. . . . 9,665 4773 — |
| $\rho\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = +0{,}231\ 9369$ | l. . . . 9,365 3699 + |
| $\frac{dy}{dt} = +0{,}681\ 1001$ | l. $\frac{dy}{dt} = 9{,}833\ 2109$ + |

(xxi *bis*) 2e terme $= -0{,}525\ 7055$ l. $\ldots 9{,}720\ 7425 -$

$\frac{1}{A} = +0{,}418\ 9626$ l. $\frac{1}{A} = 9{,}622\ 1753 +$

$A = +2{,}386\ 8483$ l. $A = 0{,}377\ 8247 +$

*Calcul de la durée de la révolution.*

(xxii) l. $\sqrt{A} = 0{,}188\ 9124 +$

l. $A^{\frac{3}{2}} = 0{,}566\ 7371 +$

$T = 3^{ans}{,}687\ 548$ l. $T = 0{,}566\ 7377 +$

*Calcul du moyen mouvement diurne.*

(xxiii) l. $\frac{k}{\sin 1''} = 3{,}550\ 0072 +$

$N'' = 962'',2091$ l. $N'' = 2{,}983\ 2695 +$

*Calcul de l'anomalie vraie et de l'excentricité.*

(xxiv) l. $\frac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{f\mu}} = 0{,}176\ 9442 +$

l. $\frac{dr}{dt} = 9{,}168\ 8038 -$

l. E sin V $= 9{,}345\ 7480 -$

$\frac{\Pi}{r} = +1{,}066\ 9313$ l. $\frac{\Pi}{r} = 0{,}028\ 1365 +$

l. E cos V $= 8{,}825\ 6292 +$

$V = -73^{\circ}\,12'\,0'',99$ l. tang V $= 0{,}520\ 1188 -$

(sin V a le signe de E sin V). l. sin V $= 9{,}981\ 0575 -$

l. cos V $= 9{,}460\ 9387 +$

(xxv) $E = 0{,}231\ 5744$ l. E $= 9{,}364\ 6905 +$

$\eta = 13^{\circ}\,23'\,23'',22$ l. cos $\eta = 9{,}988\ 0312 +$

*Vérification.*

(xxvi) l. $\frac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{A}} = 9{,}988\ 0312 +$

Erreur $= 0{,}000\ 0000$

*Calcul de l'anomalie excentrique* [illegible]

(xxvii) $45^{\circ} - \frac{1}{2}\varphi = $ [illegible]

[illegible]

(xxviii) [illegible]

ou [illegible] octobre 1847.

(xxix) [illegible] cos $v$ a le signe de $x$. l. tang $v = 9{,}704\ 1597$ — l. cos $v = 9{,}928\ 8709$ +

*Distance de la planète au nœud ascendant.*

(xxx) $v - \Omega = + 68^{\circ}\,20'\,23'',45$ l. tang $(v - \Omega) = 0{,}401\ 0532 +$

$v - \Omega = + 68\ 25\ 45{,}95$ l. tang $(v - \Omega) = 0{,}403\ 0359 +$

l. sin $(v - \Omega) = 9{,}968\ 4668 +$

cos $(v - \Omega)$ et cos $(v - \Omega)$ sont de même signe.

*Vérification.*

(xxx *bis*) l. $\frac{z}{x} = 9{,}020\ 5605 +$

l. tang $\lambda = 8{,}949\ 4391 +$

l. sin $\lambda = 8{,}947\ 7937 +$

l. sin $(v - \Omega)$ sin I $= 8{,}947\ 7937 +$

*Distance du périhélie au nœud ascendant, et longitude du périhélie.*

(XXXI) $$\varpi - \Omega = 141^\circ 37' 46'',94.$$

Pour rapporter actuellement les longitudes à l'équinoxe moyen, retranchon de $\Omega$ la nutation $1'',83$, et ajoutons ensuite $\varpi - \Omega$ au résultat; il viendr

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = 259^\circ 45' 22'',24 \\ \varpi = 41\ 23\ 9,18\end{array}\right\}$$ comptés de l'équinoxe moyen du 17,3 oct. 1847

## *Formation des positions normales, et comparaison de celles-ci ave les éléments qui viennent d'être obtenus.*

**41.** Résumons d'abord ces nombres.

*Éléments approchés de la planète Iris.*

| | | |
|---|---|---|
| Anom. moy., le 17,3 oct. 1847, t. m. de Paris. | 310°47'13'',17 | |
| Longitude du périhélie..... | 41 23 9,18 | comptées de l |
| Longitude du nœud ascendant..... | 259 45 22,24 | moyen du 17 |
| Inclinaison..... | 5 28 14,46 | |
| Angle (sin = excentricité)..... | 13 23 23,22 | |
| Moyen mouvement héliocentrique diurne.. | 962'',2091. | |

Nous avons calculé, au moyen des formules du n° **32** et de ces éléments les positions géocentriques vraies d'Iris, pour les époques moyennes inscrite au tableau du n° **35**. Dans l'application de ces formules, nous avons fai usage des positions de la Terre prises dans le *Nautical Almanach*, en le corrigeant de l'aberration; la latitude géocentrique a été corrigée de l'effe de la latitude du Soleil, par la formule (XXXIII). Ayant ensuite ajouté aux époques moyennes le temps que la lumière met à franchir la distance qu sépare la planète de la Terre, et dont l'expression en fractions de jour solaires moyens est $(7,760\ 59 -)\Delta$; les positions vraies sont devenue positions apparentes pour les époques ainsi modifiées. Le résultat du calcu est le suivant :

*Positions géocentriques apparentes d'Iris, déduites des éléments précédents.*

| TEMPS MOYEN DE PARIS, 1847. | LONGITUDES. | LATITUDES. |
|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ |
| Août..... 18,752 26 | 297.38.27,93 | + 7. 9.37,09 |
| 29,715 07 | 295.58.45,73 | + 7. 8. 9,47 |
| Septembre. 7,069 18 | 295.20.22,03 | + 7. 2. 3,85 |
| 14,879 04 | 295.16.18,09 | + 6.53.37,29 |
| Octobre ... 1,807 19 | 296.50.19,41 | + 6.30.15,49 |
| 14,906 77 | 299.29.38,53 | + 6.10.24,60 |
| 26,265 60 | 302.39.39,44 | + 5.53.17,54 |
| Novembre . 16,822 73 | 310.26.51,74 | + 5.22.30,26 |
| Décembre . 3,979 39 | 317.57.14,76 | + 4.59.51,78 |
| 15,267 28 | 323.23.31,32 | + 4.45.42,91 |

D'autre part, l'éphéméride insérée aux *Comptes rendus* a fourni les ascensions droites et déclinaisons pour ces dernières époques. Ayant ajouté à ces positions les excès moyens des observations sur l'éphéméride résultant des comparaisons du n° 34, j'ai obtenu des ascensions droites et déclinaisons *normales* que j'ai transformées en longitudes et latitudes. A la vérité, les excès dont il s'agit se rapportent aux époques non modifiées par l'effet de l'aberration ; mais leur variation est si faible, qu'il n'y a aucune erreur sensible à les rapporter à des époques qui ne diffèrent pas des premières de plus de $0^{jour},013$. Voici les positions *normales* transformées :

*Positions géocentriques apparentes de la planète Iris, déduites d'un grand nombre d'observations et dites* positions normales.

| TEMPS MOYEN DE PARIS, 1847. | LONGITUDES. | LATITUDES. | NOMBRE des observations. |
|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ | |
| Août..... 18,752 26 | 297.38.24,59 | + 7. 9.39,22 | 15 |
| 29,715 07 | 295.58.43,42 | + 7. 8.10,31 | 24 |
| Septembre. 7,069 18 | 295.20.20,76 | + 7. 2. 3,17 | 14 |
| 14,879 04 | 295.16.16,80 | + 6.53.37,92 | 11 |
| Octobre ... 1,807 19 | 296.50.19,81 | + 6.30.15,84 | 2 |
| 14,906 77 | 299.29.38,45 | + 6.10 25,28 | 5 |
| 26,265 60 | 302.39.38,13 | + 5.53.19,51 | 4 |
| Novembre . 16,822 73 | 310.26.49,74 | + 5.22.29,65 | 4 |
| Décembre . 3,979 39 | 317.57. 9,17 | + 4.59.52,03 | 3 |
| 15,267 28 | 323.23.20,20 | + 4.45.41,49 | 6 (discord.) |

En comparant ces positions aux précédentes, je trouve :

| DATES. 1847. | EXCÈS DES OBSERVATIONS SUR LES ÉLÉMENTS | | NOMBRE des observations. |
|---|---|---|---|
| | en longitude. | en latitude. | |
| Août..... 18,8 | — 3″,34 | + 2″,13 | 15 |
| 29,7 | — 2,31 | + 0,84 | 24 |
| Septembre. 7,1 | — 1,27 | — 0,68 | 14 |
| 14,9 | — 1,29 | + 0,63 | 11 |
| Octobre... 1,8 | + 0,40 | + 0,35 | 2 |
| 14,9 | — 0,08 | + 0,68 | 5 |
| 26,3 | — 1,31 | + 1,97 | 4 |
| Novembre. 16,8 | — 2,00 | — 0,61 | 4 |
| Décembre. 4,0 | — 5,59 | + 0,25 | 3 |
| 15,3 | — 11,12 | — 1,42 | 6 (discord.) |

Les latitudes sont assez bien représentées; mais les longitudes laissent évi demment des erreurs dont la marche affecte une certaine régularité. Il e probable que si les équations (5), (6) et celles qui en sont déduites avaient ét complétées par les termes dépendants des forces perturbatrices, ces résultat seraient sensiblement modifiés.

Je dois dire ici, comme remarque, qu'avant d'effectuer les calculs qu viennent d'être présentés, j'avais déjà obtenu une orbite d'Iris par la mêm méthode, à cela près que je n'avais pas tenu compte de l'effet des perturba tions lunaires sur les coordonnées de la Terre, et que j'avais calculé le dérivées du premier ordre de ces coordonnées par les formules (IX). Les ré sultats auxquels j'étais parvenu ne donnent pas, dans les comparaisons plus de 0″,5 de différence avec celles qui précèdent. J'ai préféré donne pour exemple un calcul dans lequel les valeurs des coordonnées de la Terr et de leurs dérivées se trouvent à l'abri de toute objection.

42. Dans beaucoup de circonstances, on pourrait se contenter de l'exac titude avec laquelle les éléments du n° 41 représentent les observations Comme la planète devait réapparaître vers le mois d'août 1848, quelque moments avant le lever du Soleil, à une faible hauteur au-dessus de l'hori zon, il importait de donner aux éléments le plus de précision possible, afi de la reconnaître immédiatement. L'aurore suivant d'assez près le lever de l planète, il fallait pouvoir consacrer le court espace de temps disponible, no aux recherches, mais aux observations.

J'ai donc été conduit à essayer une nouvelle approximation. A cet effet,

j'ai appliqué la méthode d'interpolation de M. Cauchy aux erreurs du tableau précédent, que j'ai représentées par deux nouvelles séries. Mais toutes les sommes *subordonnées* et différences, qui dépendent du temps seulement, se trouvant calculées dans la dernière approximation, je n'avais à calculer que les $\Delta y$, $\Delta^2 y, \ldots$; $Sy$, $S'\Delta y$, $S''\Delta^2 y, \ldots$, et à substituer leurs valeurs dans les formules du n° 23, qui donnent $a$, $b$, $c, \ldots$. Il m'a suffi de pousser les développements jusqu'à $S'''\Delta^3 y$ pour les longitudes, et jusqu'à $S'\Delta y$ pour les latitudes, inclusivement. Recommençant avec les longitudes, latitudes et leurs dérivées corrigées par les formules (XXXVI), les calculs des n$^{os}$ 38, 39 et 40, en y conservant les mêmes données relatives à la Terre, j'ai obtenu les éléments suivants, qui ont été présentés à l'Académie dans la séance du 28 août 1848 :

*Éléments de l'orbite d'Iris.*

| | | |
|---|---|---|
| Anom. moy., le 17,3 oct. 1847, t. m. de Paris. | 310°42′ 7″,07 | |
| Longitude du périhélie..... | 41 26 28, 61 | comptées de l'équin. |
| Longitude du nœud ascendant..... | 259 45 35, 91 | moy. du 17,3 oct. 1847. |
| Inclinaison..... | 5 28 15, 66 | |
| Angle (sin = excentricité)..... | 13 21 55, 79 | |
| Moyen mouvement héliocentrique diurne.. | 962″,9331 | |

Voici comment ces éléments représentent les positions normales :

| DATES. 1847. | EXCÈS DES POSITIONS OBSERVÉES en longitude. | EXCÈS DES POSITIONS OBSERVÉES en latitude. | NOMBRE des observations. |
|---|---|---|---|
| Août..... 18,8 | — 3″,6 | — 0″,2 | 15 |
| 29,7 | — 2,1 | — 1,1 | 24 |
| Septembre. 7,1 | — 0,9 | — 2,3 | 14 |
| 14,9 | — 0,9 | — 0,8 | 11 |
| Octobre... 1,8 | + 0,2 | — 0,6 | 2 |
| 14,9 | — 0,3 | 0,0 | 5 |
| 26,3 | — 1,2 | + 1,4 | 4 |
| Novembre. 16,8 | + 0,8 | — 1,1 | 4 |
| Décembre. 4,0 | + 0,9 | — 0,3 | 3 |
| 15,3 | — 1,6 | — 2,1 | 6 (discord.) |

Je me suis servi de ces éléments pour chercher la planète vers la fin du mois d'août 1848; et aussitôt que l'état du ciel a permis de voir les petites étoiles dans la région qu'elle occupait, je l'ai reconnue très-près du lieu assi-

gné par le calcul. L'observation suivante a été présentée à l'Académie, dans l séance du 11 septembre de la même année :

Iris : 1848, le 2,63600 septembre, t. m. de Paris;

$$\text{R} = 7^{h}\,59^{m}\,23^{s},06; \quad \text{D} = +19^{\circ}\,16'\,59'',6.$$

(L'étoile de comparaison, tirée de l'*Histoire céleste*, est marquée sous l n° 2683 du Catalogue de M. Baily.)

La comparaison de cette observation avec le lieu calculé au moyen de éléments ci-dessus, donne :

*Excès de l'observation sur le calcul :*

en ascension droite, $-3^{s},58$; en déclinaison, $+22'',7$.

Cette discordance est très-peu considérable, à une distance de dix mois e demi de l'époque moyenne des observations qui ont servi au calcul de l'or bite, et huit mois et demi après l'époque de la dernière d'entre elles.

En se reportant aux comparaisons présentées dans ce numéro et dans l précédent, on est conduit à rechercher les causes qui peuvent avoir empêch d'obtenir, dès la première approximation, l'exactitude fournie par la seconde et aussi cette dernière d'être plus grande encore. Nous sommes obligés d nous borner à de simples indications. Il a été dit plus haut, que les perturba tions omises dans les équations (5) et (6) sont une cause d'inexactitude de éléments; nous devons ajouter que leur omission dans la comparaison avec le observations en est une autre cause. Mais, en dehors de celles-ci, il en es de plus importantes peut-être : ce sont les combinaisons des observations qu ont donné les positions *normales*. Par exemple, l'une des deux dernière observations du groupe de onze peut être présumée en erreur de 5 à 6 seconde en ascension droite. Celle de Paris a été omise dans ce groupe, à cause de l déclinaison, qui était trop mauvaise; en la rétablissant, on aurait une moyenn plus forte d'une demi-seconde; si, d'un autre côté, l'observation de Hambour du 19 septembre est supposée défectueuse et supprimée, la moyenne se trou vera de nouveau altérée d'une demi-seconde, en sorte que l'on ne pourrai garantir l'exactitude de la moyenne $-2'',78$ à 1 seconde près, bien qu'ell résulte de onze observations.

Les observations du dernier groupe présentent des discordances bien plus considérables encore, surtout dans les déclinaisons; et, comme elles ne sont qu'au nombre de six, on voit combien la dernière position *normale* est incertaine.

Si l'on revient aux premiers groupes, dans lesquels les erreurs paraissent

varier très-lentement, on reconnaîtra qu'il ne faut point considérer ces variations comme pouvant être représentées par une droite unique, depuis l'époque de la découverte jusqu'au 2 octobre. En effet, la courbe qui les représente donne lieu, dans cet intervalle, à plusieurs inflexions qu'il était difficile de découvrir tout d'abord : par suite, nos moyennes ont pu comprendre des nombres qui, abstraction faite des erreurs des observations, ne varient pas proportionnellement au temps. Nous avons cherché à éviter cet écueil, en examinant la marche des erreurs, au moyen d'une construction graphique, et groupant celles qui nous paraissaient satisfaire à la condition de varier proportionnellement au temps.

Nous avons cherché aussi à espacer convenablement les moyennes; mais il faut reconnaître que, si ce but a été rempli aussi avantageusement qu'il était possible, nous avons dû détruire une partie du bon effet de cet espacement, en attribuant aux moyennes, des poids proportionnels aux nombres des observations. Ainsi, les quatre premiers poids, et surtout le second, nous paraissent trop forts par rapport aux suivants; le dernier paraît aussi être trop fort, eu égard à la discordance des observations.

Enfin, il eût peut-être suffi, dans les valeurs de $a$, $b$, $c$, ..., n° 38, qui sont relatives aux longitudes, de s'arrêter à $S^{IV}\Delta^4 y$, au lieu d'aller jusqu'à $S^V\Delta^5 y$.

Quoi qu'il en soit, le résultat final ne nous semble pas trop laborieusement obtenu, surtout en envisageant le grand nombre des vérifications numériques qui se présentent à chaque pas, tant dans l'application de la méthode d'interpolation de M. Cauchy, que dans nos formules pour le calcul de l'orbite. J'avouerai même que je n'espérais pas, en employant pour la première fois une méthode qui laisse une certaine part à la sagacité du calculateur, obtenir un degré d'exactitude aussi satisfaisant.

---

*P. S.* — Nous prions nos lecteurs de vouloir bien nous pardonner les nombreux détails dans lesquels nous sommes entrés, et la répétition des mêmes formules en plusieurs endroits de ce Mémoire. Notre but était, d'une part, de donner à ceux qui voudraient, pour la première fois, tenter des applications numériques, certains détails très-rares dans les ouvrages de théorie pure. D'un autre côté, nous tenions beaucoup à séparer des démonstrations les formules qui en font l'objet, et à présenter celles-ci dans l'ordre des applications; dussions-nous être obligés de les reproduire plusieurs fois.

Ceux qui auront lu ce Mémoire et nos deux Mémoires sur les Étoiles

doubles, pourront reconnaître qu'ils ont une base fondamentale commu
l'emploi des dérivées des coordonnées observées, déduites de l'interpolat
Peut-être eût-il été convenable, à cause de cela, de les condenser en un se
de manière à éviter la reproduction des parties communes; mais ces Mémo
ont été écrits à des époques différentes, et d'ailleurs, les conditions spéci
des problèmes relatifs aux étoiles doubles et aux planètes nous ont paru as
distinctes pour justifier la détermination que nous avons prise de les trai
à part.

## N. [illegible]

*Relative à l'application [illegible] les étoiles doubles [illegible] à peu près, avec [illegible]*

Nous avons dit [illegible] pourraient, dans ce cas, donner [illegible] raisons qu'il nous semble [illegible]

En premier lieu, [illegible] que leurs dérivées [illegible] de 90 degrés, pour tout autre [illegible] conjonction de l'étoile [illegible] mules (4) ne pourront [illegible] fait indéterminées des quantités [illegible] ments. Dans le cas d'une [illegible] que les données se réduiraient [illegible] impossibilité absolue d'obtenir les éléments de l'orbite.

En second lieu, il s'agit d'examiner [illegible] nos formules, en faisant usage à la fois des distances et des angles de [illegible] Si, effectivement, l'on pouvait se procurer, à une époque [illegible] conjonction, les valeurs de la distance et de ses dérivées des [illegible] ordres, puis l'angle de position et sa première dérivée, nos formules [illegible] applicables au calcul des élémens. Il reste donc à rechercher [illegible] de fortes inclinaisons, l'interpolation permettrait d'obtenir les valeurs [illegible] dérivées dont on a besoin.

Considérons le cas extrême où l'orbite réelle coïnciderait avec le [illegible] visuel, et prenons pour axe des $x$ la droite à laquelle se [illegible] apparente, de sorte que les distances $z$ s'identifient [illegible] avec les abscisses $x$, et n'en puissent différer que par leurs signes. Nous [illegible] mettrons que l'époque choisie soit notablement éloignée de la [illegible] mais, comme les suites d'observations modernes ne suffisent pas pour [illegible] miner toutes les dérivées nécessaires, nous admettrons aussi qu'[illegible] dans l'interpolation les positions observées avant et après la [illegible] série interpolée des $z$ étant différentiée par rapport au temps, [illegible]

l'intervalle embrassé par les observations, donner des valeurs de la dérivée qui soient égales, au signe près, à celles de la dérivée $\frac{dx}{dt}$. Notons, toutefois, que $\rho$ étant essentiellement positif, le signe de $\frac{d\rho}{dt}$ sera négatif avant la conjonction, et positif après. Or la première équation (5) montre que $x$ s'annule avec $x$, ou que la variation de $\frac{dx}{dt}$ est nulle à l'époque de la conjonction. Il en résulte que les deux valeurs de $\frac{dx}{dt}$, à l'instant qui précède et à l'instant qui suit la conjonction, sont égales et de même signe. La valeur de cette dérivée ne peut d'ailleurs être supposée nulle, car alors le satellite se précipiterait sur l'étoile principale, et l'orbite apparente se réduirait à un point. Mais les valeurs absolues de $x$ et de $\rho$ étant identiques, celles de leurs dérivées le sont pareillement; les deux valeurs de $\frac{d\rho}{dt}$, aux instants qui précèdent et suivent la conjonction, doivent donc aussi être égales. En vertu de ce qui vient d'être dit, elles sont de signes contraires; il faudrait donc que la série qui représente les valeurs de $\rho$, étant différentiée, change brusquement de signe à l'instant de la conjonction sans passer par zéro, ce qui est inadmissible.

La solution de continuité que l'on rencontre ici dans la dérivée $\frac{d\rho}{dt}$ répond à celle que présente l'angle de position. Celui-ci varie, en effet, brusquement de 180 degrés. On évite cet écueil au moyen des coordonnées rectangulaires, comme nous le faisons dans le deuxième Mémoire. A la vérité, on pourrait, dans ce cas extrême, admettre des valeurs négatives de $\rho$, en n'assignant aucune limite aux angles $\lambda$; mais ceci aurait besoin d'être discuté, et, d'ailleurs, ne s'appliquerait point aux cas où l'inclinaison ne serait pas exactement de 90 degrés, lesquels doivent se rencontrer bien plus fréquemment.

Supposons maintenant l'inclinaison un peu différente de 90 degrés. La dérivée de $\rho$ ne présentera plus la même solution de continuité que tout à l'heure; mais de négative elle deviendra positive en passant par zéro, en subissant un accroissement très-rapide. Les angles de position, dans cette circonstance, subiront un pareil accroissement. Les expressions en séries des angles de position et de la dérivée des distances devraient donc pouvoir varier très-rapidement dans le voisinage de la conjonction, et leurs variations présenter les caractères d'une solution de continuité d'autant plus prononcée que

clinaison s'approcherait plus de 90 degrés (*). Or de tels résultats sont difiles, sinon impossibles, à obtenir avec sécurité au moyen de l'interpolation. Pour couper court à ces difficultés, je n'ai pas cru pouvoir me dispenser présenter les formules du deuxième Mémoire, qui offrent d'ailleurs quelues avantages particuliers. Y. V.

# NOTE

## *Sur les différences constantes des distances d'étoiles doubles mesurées par MM. W. Struve et Otto Struve.*

Les distances mesurées par ces deux astronomes sont les seules que j'aie employées dans les recherches qui font l'objet des Notes de ce recueil. Il ne m'a pas paru nécessaire d'avoir égard, du moins actuellement, à une différence constante dans les déterminations comparées de MM. Struve. En effet, M. Otto Struve, en me faisant part des recherches entreprises par son père et lui sur ce sujet, mais non encore terminées, ajoute : « Autant que j'en » puisse juger maintenant, ces différences constantes, si elles existent, ne sont » que très-petites. » D'un autre côté, cette assertion se trouve confirmée par le résultat suivant extrait d'un travail que je ferai connaître prochainement.

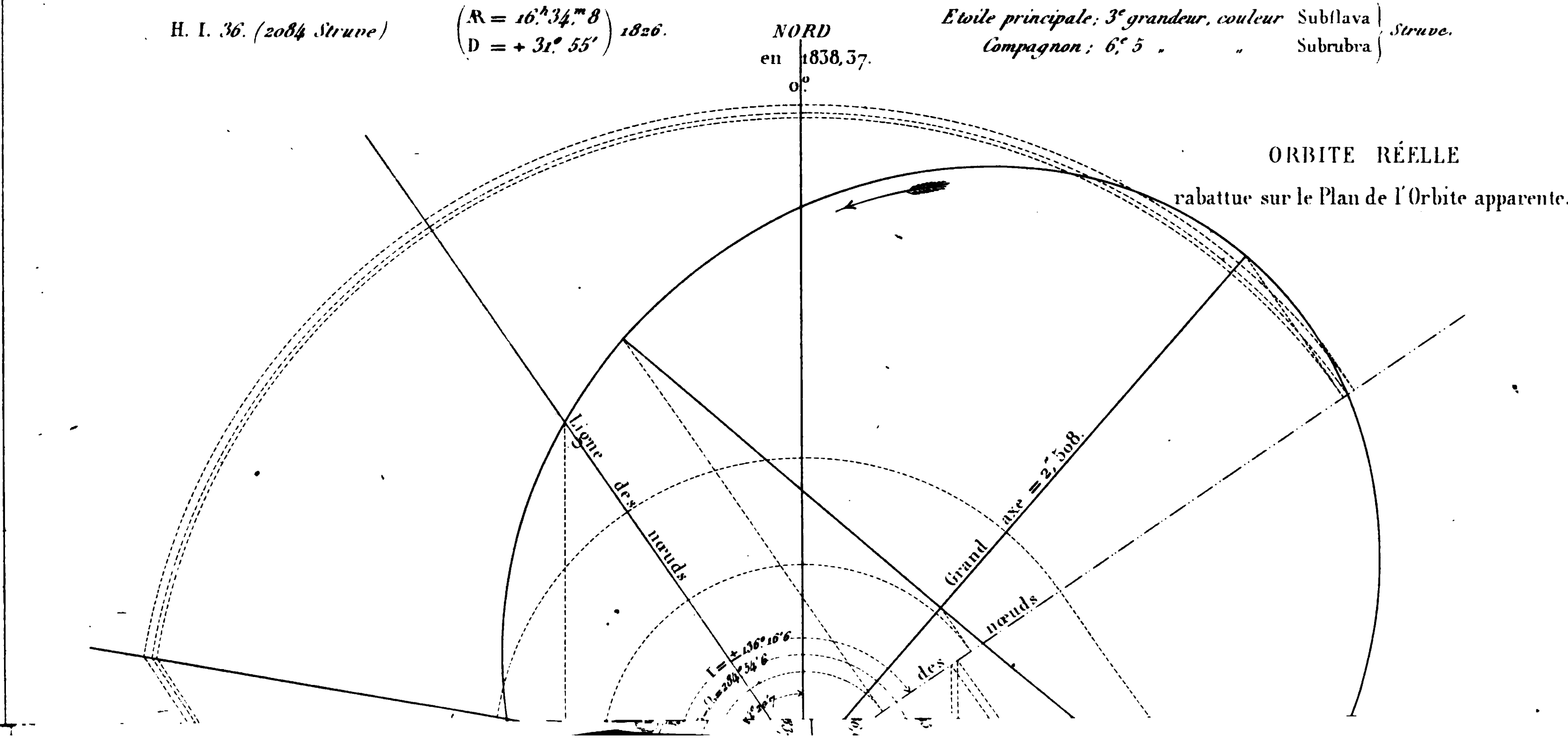
Le demi-grand axe de l'orbite réelle de 70 *p* d'Ophiuchus, déduit de onze distances mesurées par M. W. Struve et résultant de cinquante-sept jours d'observation, ne diffère que de 0″,015, d'une semblable détermination obtenue au moyen de huit distances mesurées par M. Otto Struve en trente-trois jours. Cette différence a lieu entre deux quantités presque égales à 5 secondes. Y. V.

(*) On parviendrait également à reconnaître ces caractères des fonctions $\frac{d\rho}{dt}$ et $\alpha$, en différentiant l'expression de $\frac{dr_1}{dt}$ et discutant celle de $\frac{dv_1}{dt}$, page 123, n° 14 de notre méthode pour calculer les orbites des planètes.

# ÉTOILE DOUBLE ζ D'HERCULE.

H. I. 36. (2084 Struve) $\left(\begin{matrix} R = 16^h 34^m,8 \\ D = +31^\circ 55' \end{matrix}\right)$ 1826.

*Etoile principale; 3e grandeur, couleur* Subflava } *Struve.*
*Compagnon; 6e 5* " " Subrubra }

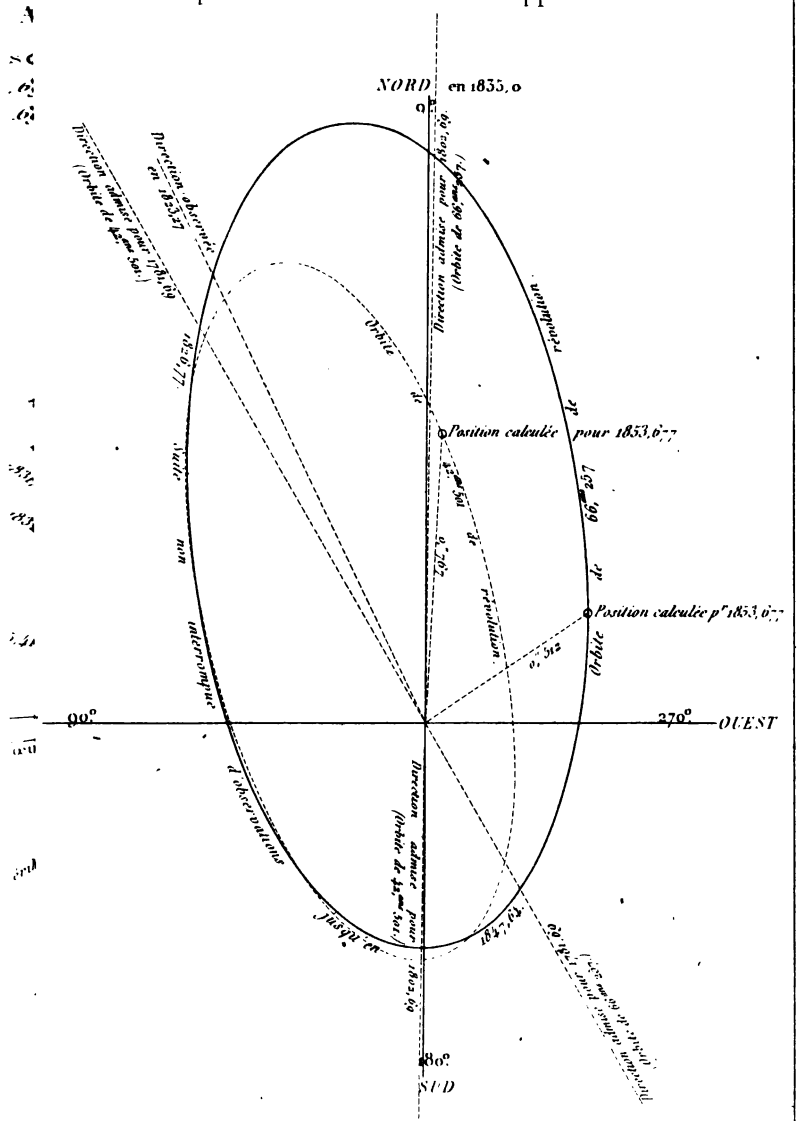



ORBITE RÉELLE

rabattue sur le Plan de l'Orbite apparente.

*que égales;*

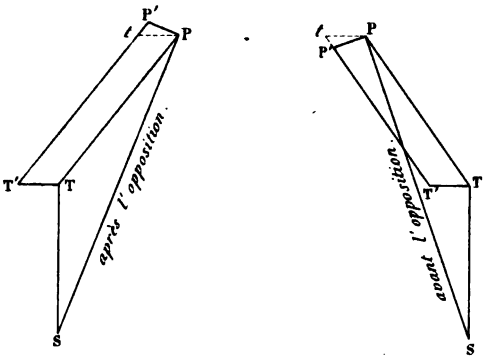
Comparaison des deux Orbites apparentes.




pour 1.er

## MÉMOIRE SUR LES ORBITES DES PLANÈTES.

Planètes supérieures.




Planètes inférieures.

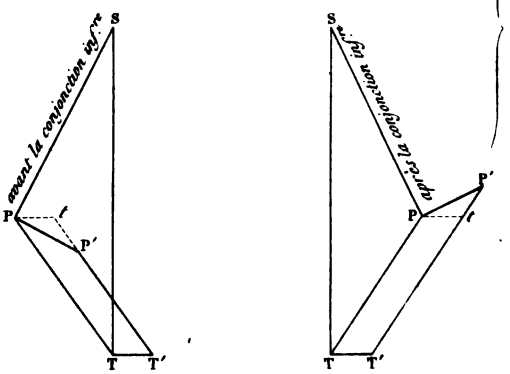



Fig. 1.

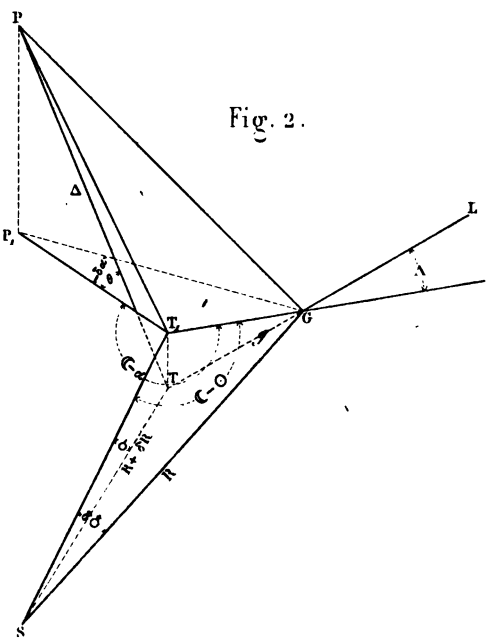
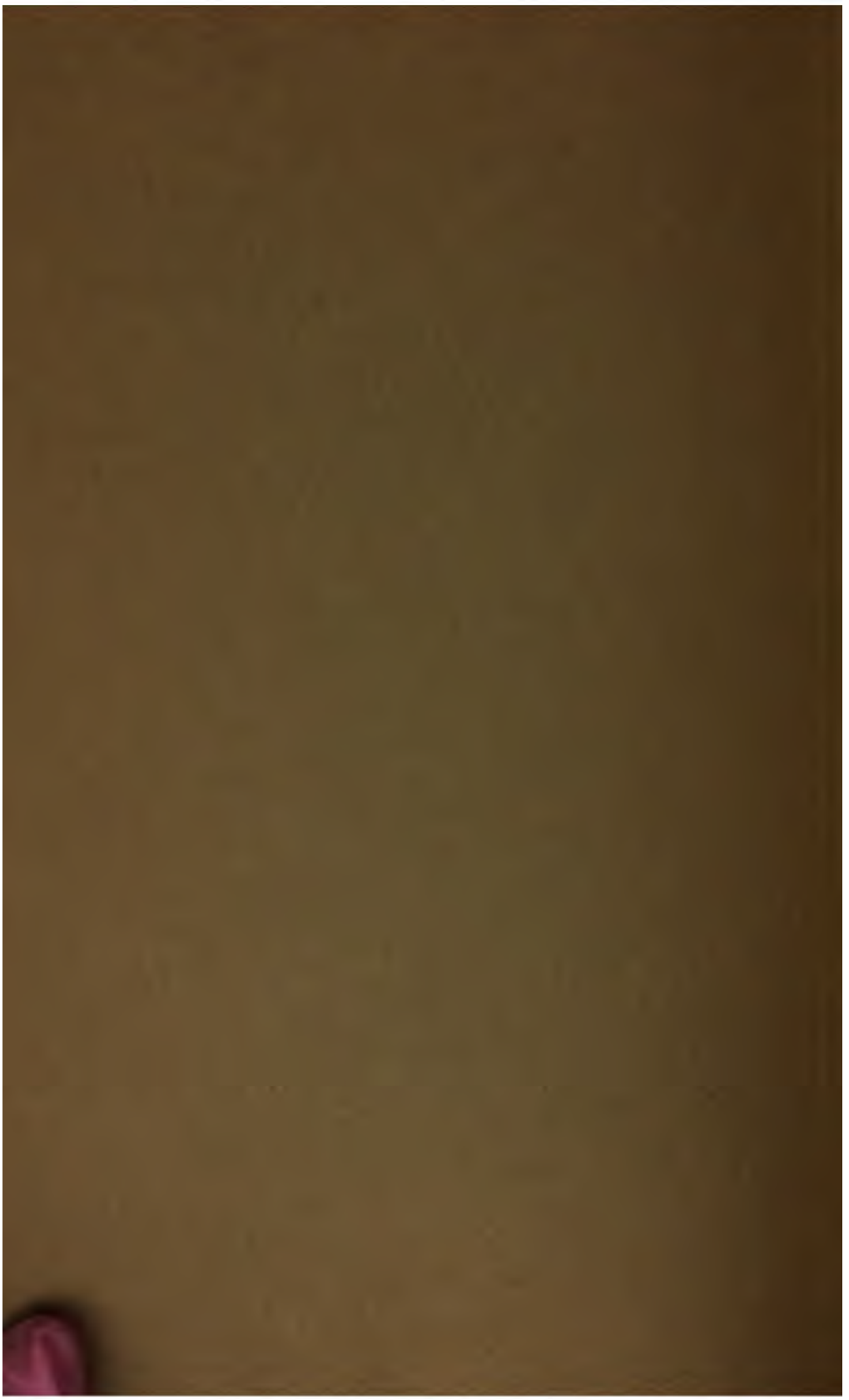
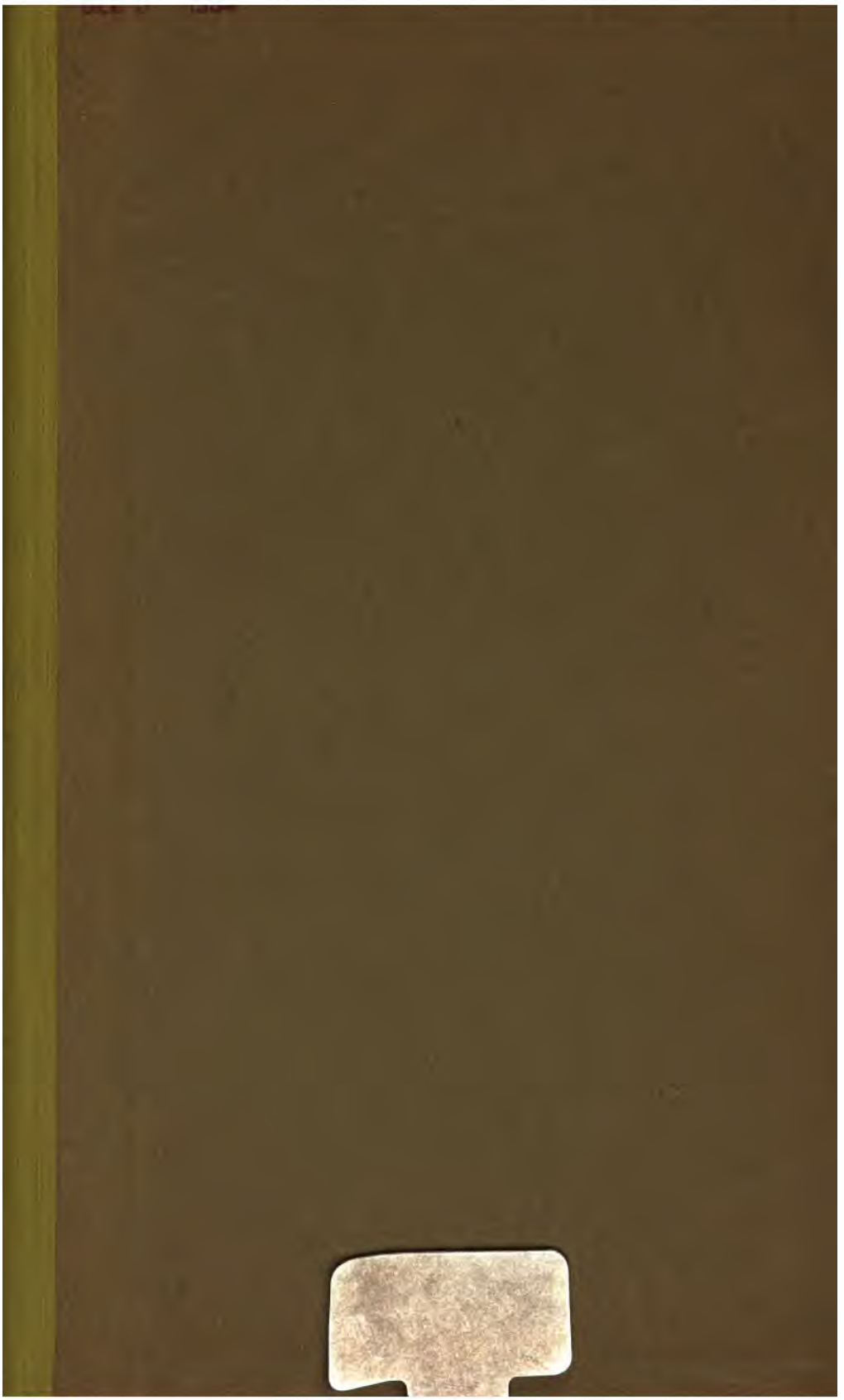



Fig. 2.

E. Hermser sc